

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА
ЧАСТИНА 1
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
МОНОГРАФІЯ

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2019

УДК 531.01

T38

Авторський колектив:

Капцов Іван Іванович, завідувач кафедри експлуатації газових і теплових систем ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, доктор технічних наук, професор (розд. 1, підрозд. 1.6–1.8);

Шпачук Володимир Петрович, завідувач кафедри технічної та будівельної механіки, доктор технічних наук, професор (розд. 2);

Котух Володимир Григорович, доцент кафедри експлуатації газових і теплових систем ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, кандидат технічних наук, доцент (розд. 1, підрозд. 1.1–1.5);

Капцова Наталія Іванівна, доцент кафедри експлуатації газових і теплових систем ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, кандидат технічних наук (розд. 3 підрозд. 3.1–3.3);

Палєєва Катерина Миколаївна, асистент кафедри експлуатації газових і теплових систем ХНУМГ ім. О. М. Бекетова (розд. 3 підрозд. 3.4–3.5)

Рецензенти:

Редько Олександр Федорович, завідувач кафедри теплогазопостачання, вентиляції та використання теплових вторинних ресурсів Харківського національного університету будівництва та архітектури, доктор технічних наук, професор;

Мірошник Марина Анатоліївна, професор кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем Українського державного університету залізничного транспорту, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова,
протокол № 8 від 01 березня 2019 р.

Технічна механіка : монографія : у 3 ч. / І. І. Капцов, В. П. Шпачук,
Т38 В. Г. Котух, Н. І. Капцова, К. М. Палєєва ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва
ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – Ч. 1 :
Теоретична механіка. – 206 с.

ISBN 978-966-695-496-4

Розглядаються основні положення й аксіоми теоретичної механіки, зокрема проекції сил на вісь координат, аналітичні способи визначення рівнодіючих, тертя ковзання, котіння й просторової системи сил і моментів сил відносно осі, основні визначення теорії механізмів і машин, аксіоми динаміки, принципу незалежності дії сил, основи кінетостатики і динаміки системи матеріальних точок.

Рекомендовано для використання у якості наукової літератури під час підготовки студентів спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія і технології, а також спеціалістів інших механічних напрямків.

УДК 531.01

© І. І. Капцов, В. П. Шпачук, В. Г. Котух,
Н. І. Капцова, К. М. Палєєва, 2019

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019

ISBN 978-966-695-496-4

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
1 СТАТИКА.....	8
1.1 Основні положення та аксіоми статички	8
1.1.1 Основні поняття статички.....	8
1.1.2 Основні аксіоми статички	9
1.1.3 Теорема про рівновагу плоскої системи трьох непаралельних сил.....	14
1.1.4 Розкладання сили на дві складові	14
1.1.5 Зв'язки і реакції зв'язків. Принцип звільнення.....	16
1.1.6 Розподілені навантаження.....	20
1.2 Плоска система сил, що сходяться	21
1.2.1 Геометричний спосіб визначення рівнодійної плоскої системи сил, що сходяться.....	21
1.2.2 Геометрична умова рівноваги плоскої системи сил, що сходяться	23
1.2.3 Проекції сили на осі координат	25
1.2.4 Аналітичний спосіб визначення рівнодійної плоскої системи сил, що сходяться.....	26
1.2.5 Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил, що сходяться	27
1.3 Плоска система паралельних сил і момент сили	29
1.3.1 Складання двох паралельних сил, спрямованих в один бік.....	29
1.3.2 Складання двох нерівних антипаралельних сил	30
1.3.3 Момент сили відносно точки	32
1.4 Плоска система пар сил	33
1.4.1 Пара сил і момент пари	33
1.4.2 Основні властивості пари.....	34
1.4.3 Еквівалентні пари	36
1.4.4 Теорема про складання пар.....	38
1.4.5 Умова рівноваги плоскої системи пар.....	39
1.4.6 Опори й опорні реакції балок	40
1.5 Плоска система довільно розташованих сил	42
1.5.1 Теорема про паралельне перенесення сили	42
1.5.2 Приведення плоскої системи довільно розташованих сил до визначеного центра.....	43
1.5.3 Властивості головного вектора і головного моменту.....	45

1.5.4 Різні випадки приведення плоскої системи довільно розташованих сил	47
1.5.5 Аналітичні умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил	47
1.6 Тертя.....	52
1.6.1 Поняття про тертя.....	52
1.6.2 Тертя ковзання	53
1.6.3 Рівновага тіла на похилій площині.....	58
1.6.4 Тертя кочення	62
1.6.5 Стійкість проти перекидання	64
1.7 Просторова система сил.....	65
1.7.1 Просторова система сил, що сходяться.....	65
1.7.2 Проекція сили на вісь у просторі.....	66
1.7.3 Розкладання сили по трьох осях координат.....	67
1.7.4 Аналітичний спосіб визначення рівнодійної просторової системи сил, що сходяться.....	68
1.7.5 Аналітичні умови рівноваги просторової системи сил, що сходяться	68
1.7.6 Момент силі відносно осі.....	70
1.7.7 Аналітичні умови рівноваги просторової системи довільно розташованих сил.....	71
1.7.8 Теорема про момент рівнодійної відносно осі (теорема Варіньона).....	75
1.8 Центр тяжіння.....	76
1.8.1 Центр паралельних сил	76
1.8.2 Визначення положення центра тяжіння	79
1.8.3 Методи знаходження центра тяжіння	80
1.8.4 Положення центра тяжіння деяких фігур	83
2 КІНЕМАТИКА	88
2.1 Кінематика точки	88
2.1.1 Основні поняття кінематики	88
2.1.2 Основні визначення теорії механізмів і машин	88
2.1.3 Способи завдання руху точки	89
2.1.4 Швидкість точки.....	92
2.1.5 Прискорення точки в прямолінійному русі	95
2.1.6 Прискорення точки в криволінійному русі.....	97
2.1.7 Поняття про кривизну кривих ліній	98
2.1.8 Теорема про проекцію прискорення на дотичну і нормаль	99
2.1.9 Види руху точки залежно від прискорень.....	103

2.1.10	Формули і графіки рівномірного руху точки	104
2.1.11	Формули і графіки рівнозмінного руху точки	105
2.1.12	Теорема про проекцію швидкості на координатну вісь	109
2.1.13	Теорема про проекцію прискорення на координатну вісь	112
2.2	Простіші рухи твердого тіла	114
2.2.1	Поступальний хід	114
2.2.2	Обертання довкола нерухомої осі	116
2.2.3	Різні види обертального руху	120
2.2.4	Порівняння формул кінематики для поступального та обертального ходів	124
2.2.5	Перетворення обертальних рухів	125
2.3	Складний рух точки	129
2.3.1	Поняття про складний рух точки	129
2.3.2	Теорема про складання швидкостей	131
2.4	Плоскопаралельний рух твердого тіла	133
2.4.1	Поняття про плоскопаралельний рух	133
2.4.2	Метод миттєвих центрів швидкостей	134
2.4.3	Властивості миттєвого центра швидкостей	136
2.4.4	Розкладання плоскопаралельного руху на поступальний й обертальний	139
3	ДИНАМІКА	144
3.1	Основи динаміки матеріальної точки	144
3.1.1	Аксіоми динаміки. Основне рівняння	144
3.1.2	Принцип незалежності дії сил. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки	146
3.1.3	Рух матеріальної точки, кинутої під кутом до горизонту	152
3.2	Основи кінетостатики	156
3.2.1	Метод кінетостатики	156
3.2.2	Сили інерції в криволінійному русі	159
3.3	Робота і потужність	162
3.3.1	Робота постійної сили на прямолінійній ділянці шляху	162
3.3.2	Робота змінної сили на криволінійній ділянці шляху	163
3.3.3	Теорема про роботу рівнодійної	164
3.3.4	Теорема про роботу сили тяжіння	166
3.3.5	Робота постійної сили, прикладеної до тіла, що обертається	168
3.3.6	Потужність	170
3.3.7	Коефіцієнт корисної дії	171
3.4	Загальні теореми динаміки матеріальної точки	173
3.4.1	Теорема про зміну кількості руху	173

3.4.2	Теорема про зміну кінетичної енергії.....	176
3.4.3	Закон збереження механічної енергії	181
3.5	Основи динаміки системи матеріальних точок	183
3.5.1	Рівняння поступального ходу твердого тіла	183
3.5.2	Рівняння обертального руху твердого тіла	185
3.5.3	Кінетична енергія твердого тіла	190
3.5.4	Порівняння формул динаміки для поступального та обертального ходів твердого тіла.....	192
3.5.5	Поняття про балансування тіл, що обертаються.....	197
3.5.6	Деякі відомості про механізми	199
	ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	206

ВСТУП

Теоретична механіка – це наука про найпростіші форми руху, що зводяться до простих переміщень або переходів фізичних тіл із одного положення чи стану у просторі й часі в інше внаслідок взаємодії між матеріальними тілами.

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Із визначення теоретичної механіки випливає, що вона належить до фундаментальних природничих наук, оскільки природознавство загалом вивчає різні форми руху матерії.

Історія розвитку теоретичної механіки переконує у тому, що вона є однією з наукових основ техніки і технології, оскільки існує взаємний зв'язок між проблемами теоретичної механіки і проблемами техніки і технології.

Значення теоретичної механіки сьогодні безупинно зростає. Найскладніші проблеми техніки і технології, що постійно виникають у зв'язку з розвитком нових видів виробництва і нових технічних засобів, які вже не можна розв'язати на підставі одних тільки дослідних даних, потребують для свого розв'язання моделювання на основі попереднього точного розрахунку і наукового передбачення, що опирається на глибокі знання законів і методів теоретичної механіки.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона, тому вона називається ньютонівською, класичною механікою, на відміну від інших напрямків у механіці, що ґрунтуються на інших принципах, таких як релятивістська механіка.

З огляду на історичні традиції за характером задач, що вивчаються, почасти з методичних міркувань теоретична механіка поділяється на статику, кінематику, динаміку. Такий розподіл значною мірою полегшує дослідження механічного руху тіл і перетворення енергії та пов'язує питання теоретичної механіки з іншими галузями науки і техніки.

Дана книга є першою частиною монографії «Технічна механіка», метою створення якої є огляд тенденції побудови і удосконалення машин і механізмів, зокрема в нафтогазові галузі, а також в інших галузях науки і техніки. Питання, що розглядаються в монографії, базуються на досягненнях теоретичних і прикладних наук. Загалом монографія покликана вирішити завдання розвитку й удосконалення системних зв'язків між теоретичними знаннями і практичним застосуванням технічної механіки.

1 СТАТИКА

1.1 Основні положення та аксіоми статyki

1.1.1 Основні поняття статyki

Статика є частиною теоретичної механіки, що вивчає умови, за яких тіло знаходиться в рівновазі. Рівновагою вважатимемо такий стан, коли тіло знаходиться у спокої або рухається прямолінійно і рівномірно.

Тіло називають абсолютно твердим (або абсолютно жорстким), якщо відстань між будь-якими його точками не змінюється за дії на нього інших тіл. Абсолютно твердих тіл у природі немає, але у багатьох випадках зміни форми і розмірів (деформації) тіл настільки незначні, що ними можна нехтувати. У теоретичній механіці тіла вважають абсолютно твердими і фізико-механічні властивості їхні не враховують (за винятком питань, пов'язаних з тертям).

Матеріальною точкою називається точка, що має масу. Матеріальною точкою враховується не лише тіло, що має дуже малі розміри, але і будь-яке тіло, розмірами якого в умовах конкретного завдання можна нехтувати. Одне і те саме реальне тіло залежно від постановки завдання може розглядатися або як матеріальна точка, або як тіло, розміри якого необхідно врахувати. Будь-яке тіло можна вважати взаємозв'язаною сукупністю (системою) матеріальних точок. Абсолютно тверде тіло є незмінною системою матеріальних точок.

Тіло називається вільним, якщо жодні інші тіла не перешкоджають його переміщенню в будь-якому напрямку, інакше тіло називається скованим або зв'язаним. Більшість тіл, що оточують нас, є скованими тілами.

Тіла в природі по-різному взаємодіють між собою або з їхнім довкіллям. Механічна взаємодія тіл, тобто взаємодія, що впливає на їхній стан спокою або руху (механічний стан), характеризується силами.

Сила є мірою механічної взаємодії тіл. Сила характеризується трьома елементами: числовим значенням, напрямком і точкою дотику. Отже, сила – величина векторна. Числове значення сили називається модулем вектора сили. Напрямок сили є напрямком того руху, який отримала б вільна матеріальна точка, що покоїться, під дією цієї сили. Пряма лінія, по якій направлений вектор сили, називається лінією дії сили.

Як відомо з фізики, Міжнародна система одиниць (СІ) як одиницю сили встановлює Ньютон (Н).

Ньютон є сила, що повідомляє тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямку дії сили.

Графічно силу змальовують відрізком прямої із стрілкою; довжина відрізка в певному масштабі дорівнює модулю вектора сили (рис. 1.1). Масштаб сили показує, скільки одиниць модуля сили міститься в одиниці довжини її вектора. Одиниця масштабу сили, наприклад $[\mu_p] = \text{Н/мм}$ або $[\mu_p] = \text{Н/см}$.

На рисунку 1.1 зображена сила, прикладена в точці A , що діє по лінії m . Вектор сили позначимо прописною латинською жирною буквою P , а модуль сили – тією саме буквою, але світлою P^* . Для вектора сили P точка A називатиметься початком, а точка B – кінцем вектора (рис. 1.1).

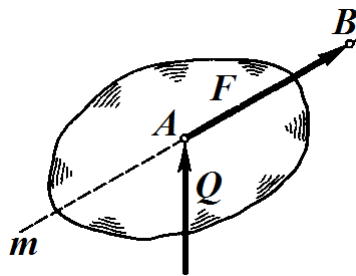


Рисунок 1.1

Сукупність тіл (зокрема матеріальних точок), якимось чином зв'язаних між собою, назовемо системою тіл. Сили взаємодії між тілами, що входять в цю систему, називають внутрішніми, а сили, з якими діють на цю систему інші тіла, – зовнішніми. Якщо цю систему розітнути на частини і розглядати рівновагу кожної частини окремо, то внутрішні для всієї системи сили, що діють у перетинах, стануть зовнішніми силами для частин системи. Такий метод дозволяє визначити внутрішні сили, що діють у перетинах, і називається методом перетинів.

1.1.2 Основні аксіоми статyki

Умови, за яких тіло може знаходитися в рівновазі, виводяться з декількох основних положень, що приймаються без доказів, але підтверджених досвідом і званих аксіомами статyki.

Аксіома I (аксіома інерції, або перший закон Ньютона)

Усяке тіло зберігає свій стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, поки які-небудь сили не виведуть тіло з цього стану.

Здатність матеріального тіла зберігати рух за відсутності сил, що діють, або в поступовій зміні цього руху, коли на тіло починають діяти сили, називається інерцією або інертністю. Інертність є однією з основних властивостей матерії.

На підставі цієї аксіоми станом рівноваги вважаємо такий стан, коли тіло знаходиться у спокої або рухається прямолінійно і рівномірно, тобто за інерцією.

Аксіома II (аксіома взаємодії, або третій закон Ньютона)

Сили взаємодії між собою двох тіл завжди рівні за модулем і направлені по одній прямій в протилежні боки.

З третього закону Ньютона витікає, що однобічної механічної дії одного тіла на інше не існує, тобто всі сили природи є парними.

Сукупність сил, прикладених до конкретного тіла (або системі тіл), називається системою сил. Сила дії якого-небудь тіла на конкретне і сила протидії не є системою сил, оскільки вони прикладені до різних тіл.

Якщо яка-небудь система сил має таку властивість, що після додавання до вільного тіла вона не змінює його механічний стан, то така система сил називається урівноваженою.

Аксіома III (умова рівноваги двох сил)

Для рівноваги вільного твердого тіла, що знаходиться під дією двох сил, необхідно і достатньо, щоб ці сили були рівними за модулем і діяли по одній прямій в протилежні боки.

Умова, сформульована в цій аксіомі, є необхідною для рівноваги двох сил. Це означає, що якщо система двох сил знаходиться в рівновазі, то ці сили мають бути рівними за модулем і діяти по одній прямій в протилежні боки.

Умова, сформульована в цій аксіомі, є достатньою для рівноваги двох сил. Це означає, що справедливе зворотне формулювання аксіоми, а саме: якщо дві сили є рівними за модулем і діють по одній прямій в протилежні боки, то така система сил обов'язково знаходиться в рівновазі.

Аксіома IV

Рівновага (як і будь-який інший механічний стан) твердого тіла не порушиться, якщо до нього прикласти або видалити систему урівноважених сил.

Висновок з аксіом III і IV

Механічний стан твердого тіла не порушиться від перенесення сили уздовж лінії її дії.

Доведемо цей висновок. Хай на тверде тіло діє з-поміж інших сила P , прикладена в точці A , з лінією дії AB (рис. 1.2). У довільно взятій на лінії AB точці B прикладені дві рівні за модулем і протилежні за напрямком сили P_1 і P_2 ,

що діють по лінії AB . Згідно з аксіомою III, сили P_1 і P_2 взаємно урівноважені, а на підставі аксіоми IV їх можна прикласти до тіла, не порушуючи механічного стану. Підберемо сили P_1 і P_2 такими, щоб вони за модулем дорівнювали силі P :

$$P_1 = P_2 = P. \quad (1.1)$$

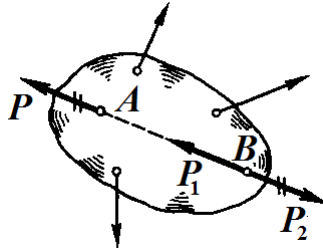


Рисунок 1.2

На підставі аксіоми IV відкинемо сили P і P_2 як взаємно урівноважені. Тоді силу P_1 , що залишилася, можна розглядати як силу P , перенесену з точки A в точку B по лінії дії, водночас механічний стан не порушується.

Висновок доведений.

Підкреслимо, що перенесення сили уздовж лінії її дії можна здійснювати лише в тому випадку, якщо конкретне тіло абсолютно тверде.

Дві різні системи сил прийнято вважати еквівалентними, якщо одну з них можна замінити іншою, не порушуючи механічного стану вільного твердого тіла.

Варто зауважити, що еквівалентні системи сил можуть викликати різні деформації нетвердого тіла.

На рисунку 1.2 зображено дві системи сил, що порізно діють на один і той саме стрижень AB , за $P_1 = P_2$, а $Q_1 = Q_2$. На підставі аксіоми III зрозуміло, що кожна з цих систем не виводить стрижень з рівноваги, тобто вони еквівалентні. Проте система сил (P_1, P_2) прагне укоротити стрижень, а система сил (Q_1, Q_2) подовжити його. Еквівалентність систем сил умовимося записувати так:

$$(P_1, P_2) \equiv (Q_1, Q_2). \quad (1.2)$$

На підставі висновку з аксіом III і IV можна сказати, що дві сили еквівалентні, якщо вони рівні за модулем і діють по одній прямій в один бік. Два вектори сили (як і два будь-яких однорідних за розмірністю вектори) рівні, якщо вони паралельні, однаково направлені і мають рівні модулі.

Одна сила, еквівалентна певній системі сил, називається рівнодійною, а сили цієї системи – складовими цієї рівнодійної.

Сила, яка врівноважує певній систему сил, називається такою, що врівноважує ці системи.

Рівнодійна і врівноважувальна сили однієї і тієї саме системи рівні за модулем і діють по одній прямій у протилежні сторони. Рівнодійна урівноваженої системи сил дорівнює нулю, інакше кажучи, урівноважена система сил еквівалентна нулю.

Аксиома V (аксіома паралелограма)

Рівнодійна двох сил, прикладених до тіла в одній точці, рівна за модулем і збігається за напрямком із діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, і прикладена в тій самій точці. Побудова діагоналі паралелограма (рис. 1.3, а), сторонами якого є задані вектори, називається векторним або геометричним складанням. Отже, можна сказати, що рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці, дорівнює їхній векторній сумі:

$$F_{\Sigma} = P + Q \quad (1.3)$$

і прикладена в тій самій точці.

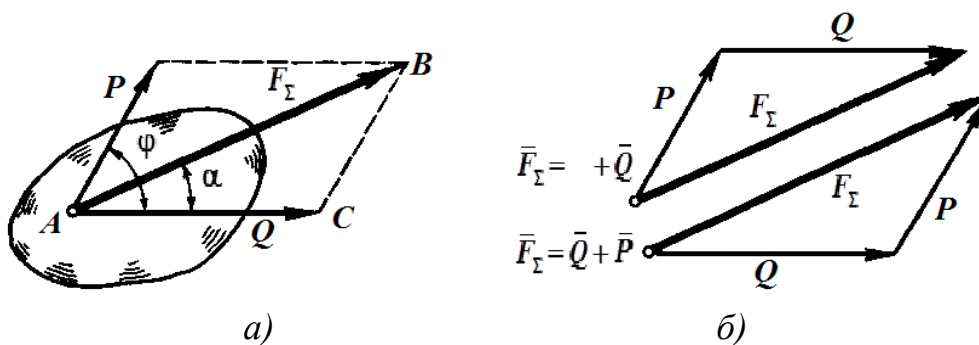


Рисунок 1.3

Рівнодійну двох сил можна знайти, побудувавши замість паралелограма сил трикутник сил (рис. 1.3, б). З рисунку 1.3, б видно, що порядок складання векторів на величину рівнодійної не впливає, тобто

$$F_{\Sigma} = P + Q = Q + P. \quad (1.4)$$

Модуль і напрямок рівнодійної двох сил, прикладених в одній точці, можна визначити аналітично, для чого розглянемо трикутник ABC (рис. 1.3, а).

За теоремою косинусів

$$F_{\Sigma}^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(\pi - \phi) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \phi, \quad (1.5)$$

звідки модуль рівнодійної

$$F_{\Sigma} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \phi}. \quad (1.6)$$

За теоремою синусів

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{F_{\Sigma}}{\sin(\pi - \phi)} = \frac{F_{\Sigma}}{\sin \phi}, \quad (1.7)$$

звідки знайдемо напрямок рівнодійної:

$$\sin \alpha = \frac{P \sin \phi}{F_{\Sigma}}. \quad (1.8)$$

Розглянемо окремі випадки складання двох сил:

– $\phi = 0$, тоді

$$F_{\Sigma} = P + Q. \quad (1.9)$$

Рівнодійна двох сил, що діють по одній прямій в один бік, дорівнює їхній сумі і спрямована по тій самій прямій в той самий бік;

– другий випадок $\phi = 180^\circ$, тоді

$$F_{\Sigma} = P - Q. \quad (1.10)$$

Рівнодійна двох сил, що діють по одній прямій в різні боки, дорівнює різниці цих сил і спрямована по тій самій прямій у бік більшої сили;

– $\phi = 90^\circ$, тоді

$$F_{\Sigma} = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (1.11)$$

Рівнодійна двох сил, що діють під прямим кутом, дорівнює за величиною діагоналі прямокутника, побудованого на цих силах.

1.1.3 Теорема про рівновагу плоскої системи трьох непаралельних сил

Теорема. Для рівноваги плоскої системи трьох непаралельних сил необхідно, але недостатньо, щоб лінії дії цих сил перетиналися в одній точці.

Нехай надані сили P , Q і F , а лінії дії сил P і Q перетинаються в точці A (рис. 1.4). На підставі висновку з аксіом III і IV перенесемо сили P і Q уздовж ліній їхньої дії в точку A і на підставі аксіоми паралелограма знайдемо рівнодійну F_{Σ} цих сил. У результаті отримуємо систему двох сил (F_{Σ}, F) , еквівалентну цим трьом силам:

$$(P, Q, F) \equiv (F_{\Sigma}, F). \quad (1.12)$$

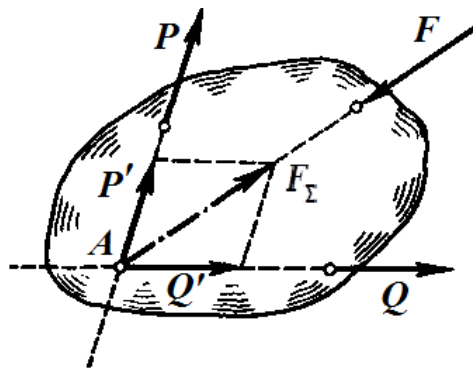


Рисунок 1.4

Проте, згідно з аксіомою III, рівновага можлива, якщо сили F_{Σ} і F лежать на одній прямій, отже, лінія дії сили F_{Σ} також пройде через точку A .

Ця теорема дає лише необхідну умову рівноваги, але недостатню, оскільки три сили можуть сходитися в одній точці, але не бути в рівновазі (сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називають такими, що сходяться).

1.1.4 Розкладання сили на дві складові

Розкласти силу на складові – це означає знайти систему сил, еквівалентну цій силі. У загальному випадку задача розкладання сили A дві складові є задачею невизначеною, такою, що має незліченну кількість рішень. Для того щоб задача мала певний розв’язок, необхідно задати дві умови, наприклад напрямки або модулі двох складових і тому подібне. Можливі чотири варіанти розкладання сили F_{Σ} на дві складові P і Q , прикладені в тій самій точці. У всіх випадках розв’язок зводиться до побудови паралелограма сил.

1. Надані напрямки двох складових P і Q .

Розв'язок показаний на рисунку 1.5.

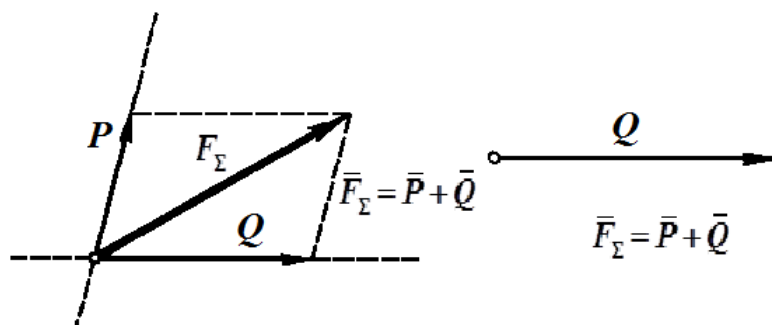


Рисунок 1.5

2. Надані модуль і напрямок однієї складової Q .

Розв'язок показаний на рисунку 1.6.

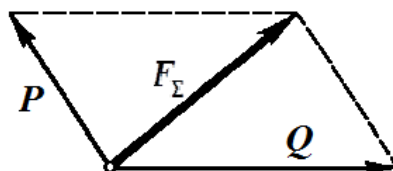


Рисунок 1.6

3. Надані модулі двох складових P і Q .

Задача розв'язується вирішується методом зарубок (рис. 1.7).

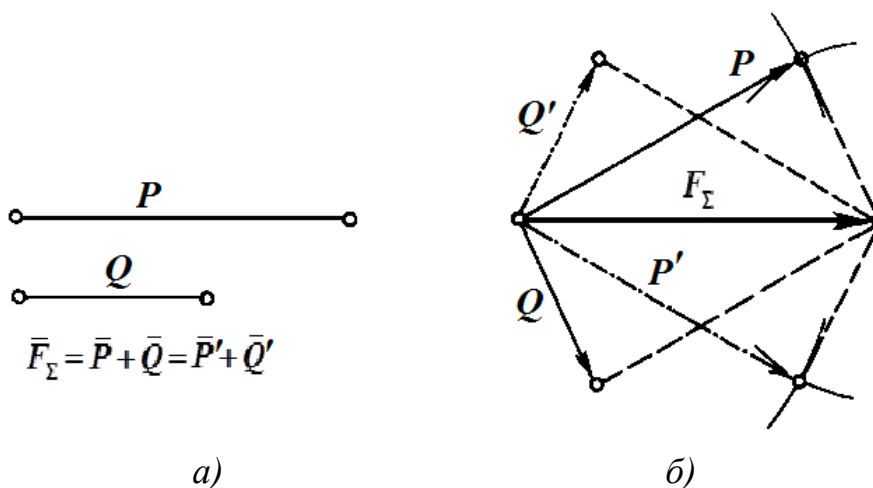


Рисунок 1.7

Задача має два розв'язання, якщо $P + Q > F_Σ$ і $P - Q < F_Σ$.

Задача не має розв'язань, якщо $P + Q < F_Σ$ і $P - Q > F_Σ$.

Задача має одне розв'язання, якщо $P + Q = F_Σ$ і $P - Q = F_Σ$.

4. Надані напрямки складової Q і модуль другої складової P .
Задача розв'язується методом зарубок (рис. 1.8).

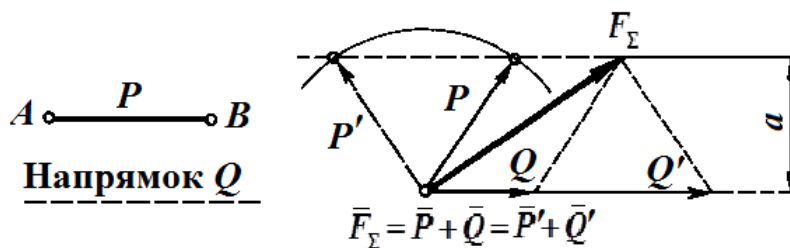


Рисунок 1.8

Задача має одне розв'язання, якщо $a = AB$ (у цьому випадку кут між векторами P і Q дорівнює 90°).

Задача має два розв'язання, якщо $a < AB$.

Задача не має розв'язань, якщо $a > AB$.

З рисунку 1.8 видно, що модуль складової залежить від напрямку другої складової.

Приклад 1.1. Сила тиску стружки за напрямком, перпендикулярному передній грані різця, дорівнює R . Кут різання різця (кут між передньою гранню і напрямком руху оброблюваного предмету) дорівнює δ . Визначити силу N опору різання, направлену по лінії AB , і перпендикулярну до неї силу S , що притискає різець до оброблюваної поверхні (рис. 1.9). Тертям нехтувати.

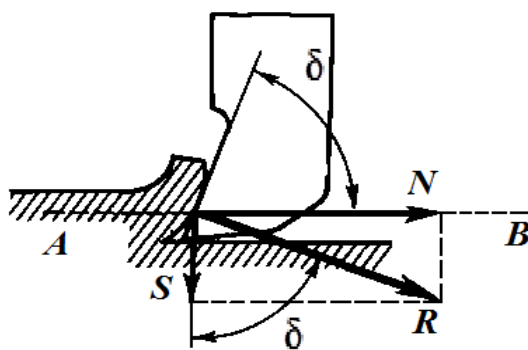


Рисунок 1.9

Розв'язання. Розкладемо задану силу R на дві складові N і S по заданих напрямках. З прямокутного трикутника отримаємо

$$N = R \sin \delta, \quad S = R \cos \delta.$$

1.1.5 Зв'язки і реакції зв'язків. Принцип звільнення

Зв'язками називають обмеження, що накладаються на положення і швидкості точок тіла в просторі. Сила, з якою тіло діє на зв'язок, називається насильницький тиск; сила, з якою зв'язок діє на тіло, називається насильницькою реакцією або просто реакцією. Згідно з аксіомою взаємодії,

ці сили за модулем рівні і діють по одній прямій в протилежні боки. Сили реакцій і тиску прикладені до різних тіл і тому не є системою сил.

Сили, що діють на тіло, поділяються на активні та реактивні. Активні сили прагнуть переміщати тіло, до якого вони прикладені, а реактивні перешкоджають цьому переміщенню. Принципова відмінність активних сил від реактивних полягає в тому, що значення реактивних сил, взагалі кажучи, залежить від значення активних сил, але не навпаки. Активні сили часто називають навантаженнями.

Підчаси розв'язання більшості задач статички сковане тіло умовно зображують як вільне за допомогою так званого принципу звільнення, який формулюється так: всяке сковане тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв'язки, замінивши їх реакціями.

У результаті вживання цього принципу отримуємо тіло, що вільне від зв'язків і знаходиться під дією деякої системи активних і реактивних сил.

Напрямок реакцій визначається тим, у якому напрямку цей зв'язок перешкоджає переміщенню тіла. Правило для визначення напрямку реакцій можна сформулювати так: напрямок реакції зв'язку протилежний до напрямку переміщення, що знищується цим зв'язком.

Якщо зв'язки вважати ідеально гладкими, то у багатьох випадках можна відразу вказати напрямок їхніх реакцій. Розглянемо напрямки реакцій основних видів зв'язків, що зустрічаються в різних конструкціях.

1. Ідеально гладка площина (рис. 1.10). У цьому випадку реакція R направлена перпендикулярно опорній площині у бік тіла, оскільки такий зв'язок не дає тілу переміщатися лише у бік опорної площини і перпендикулярно їй.

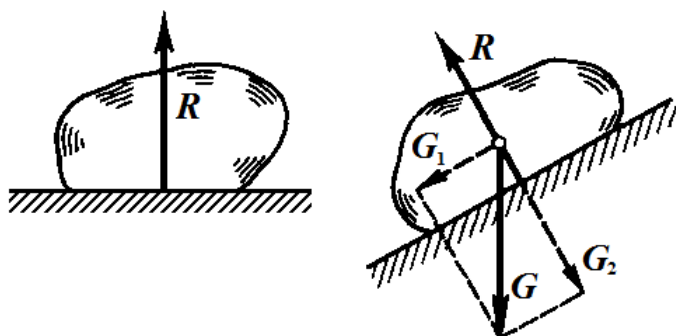


Рисунок 1.10

Якщо тіло знаходиться на похилій площині, то, розклавши силу тяжіння R на дві складові G_1 і G_2 , паралельну і перпендикулярну опорній площині, можна бачити, що складова G_1 рухатиме тіло уздовж площини, а складова G_2 притискуватиме тіло до площини і врівноважуватиметься реакцією R .

2. Ідеально гладка поверхня (рис. 1.11). У цьому випадку реакція R направлена перпендикулярно дотичній площині $t-t$, тобто по нормалі до опорної поверхні у бік тіла, оскільки нормаль є єдиний напрямок переміщення тіла, яке не допускає подібний зв'язок.

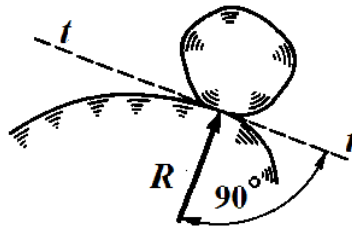


Рисунок 1.11

3. Закріплена точка або ребро кута (рис. 1.12, ребро B). У цьому випадку реакція R_B направлена по нормалі до поверхні ідеально гладкого тіла у бік тіла, оскільки нормаль до поверхні тіла є єдиним напрямком переміщення, який не дозволяють ці зв'язки.

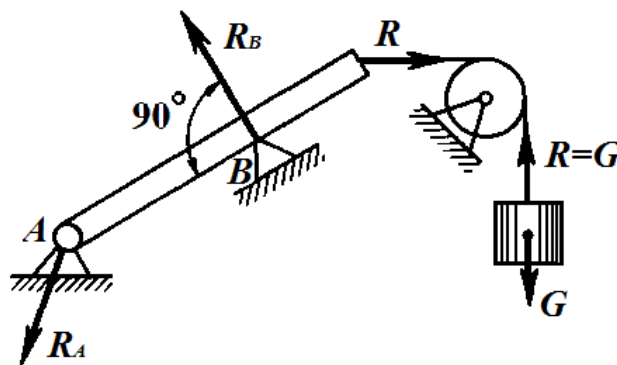


Рисунок 1.12

4. Гнучкий зв'язок (рис. 1.12). Реакція R гнучкого зв'язку не дає тіл лише віддалятися від точки підвісу і тому направлена уздовж зв'язку від тіла до точки підвісу. З рисунку 1.12 видно, що гнучкий зв'язок, перекинутий через блок, змінює напрямок зусилля, що передається (натягнення нитки).

У конструкціях широко поширені зв'язки, які називають шарнірами. Шарніром є рухливе з'єднання двох тіл, дозволене обертання довкола загальної осі (циліндровий шарнір) або загальної точки (кульовий шарнір).

5. Ідеально гладкий циліндровий шарнір (рис. 1.12, шарнір A ; рис. 1.13, підшипник DB); у цьому випадку заздалегідь відомо лише, що реакція R_A проходить через вісь шарніра і перпендикулярна цій осі, оскільки шарнірне з'єднання допускає обертання довкола осі, але не допускає будь-яке переміщення тіла, перпендикулярне цій осі.

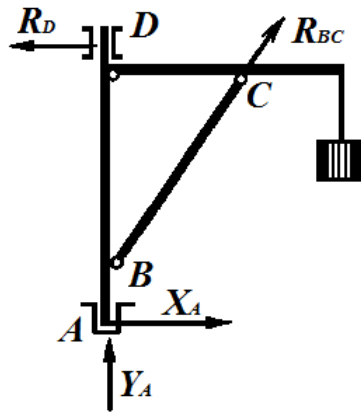


Рисунок 1.13

6. Ідеально гладкий кульовий шарнір. У цьому випадку заздалегідь відомо лише, що реакція проходить через центр шарніра, оскільки тіло, закріплене в кульовому шарнірі, може повертатися в будь-якому напрямку, але не може здійснювати жодних лінійних переміщень у просторі.

7. Ідеально гладкий підп'ятник (рис. 1.13, підп'ятник A). Підп'ятник можна розглядати як поєднання циліндрового шарніра і опорної площини. Тому вважатимемо реакцію підп'ятника такою, що складається з двох складових: X_A і Y_A . Повна реакція R_A підп'ятника дорівнює векторній сумі цих складових:

$$R_A = X_A + Y_A. \quad (1.13)$$

8. Стрижень, закріплений двома кінцями в ідеально гладких шарнірах і навантажений лише по кінцях (рис. 1.13, стрижень BC). У цьому випадку реакція стрижня, згідно з аксіомою III, може бути направлена лише по лінії BC , тобто по прямій, що з'єднує осі шарнірів.

Надалі часто зустрічатимуться елементи різних конструкцій, називані брусами. Брусом прийнято вважати тверде тіло, у якого довжина значно більша поперечних розмірів; безліч (геометричне місце) центрів тяжіння всіх поперечних перетинів називається віссю бруса. Брус із прямолінійною віссю, що покладений на опори і згинається прикладеними до нього навантаженнями, називають балкою.

Приклад 1.2. Визначити напрямки реакцій опор балки AB , шарнірно закріпленої на нерухомій опорі A і опорі B , покладеної на катки; вказати напрямки сили тиску балки на опору A (рис. 1.14). Силою тяжіння балки нехтувати.

Розв'язання. Застосувавши принцип звільнення, відкинемо зв'язки балки, тобто опори A і B , і замінимо їх реакціями R_A і R_B . Реакція R_B рухливого шарніра

перпендикулярна опорній площині, оскільки це єдиний напрям переміщення, що знищується цим зв'язком. Реакція R_A нерухомого шарніра проходить через вісь, і згідно з теоремою про рівновагу трьох непаралельних сил, лінія дії цієї реакції повинна проходити через точку M . Реакція R_A буде направлена по лінії AM праворуч і вгору, оскільки якщо опору A подумки відкинути, то без реакції кінець F переміститься вліво і вниз.

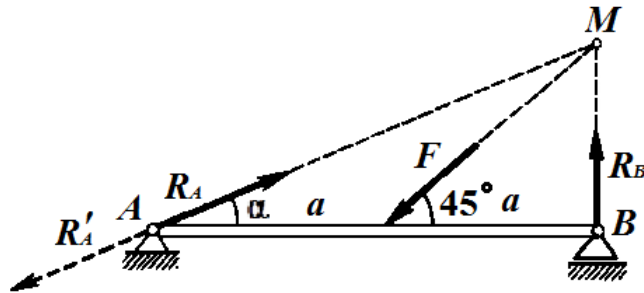


Рисунок 1.14

Згідно з третім законом Ньютона, сила тиску R'_A балки на опору також буде направлена по лінії AM , але в протилежний бік.

Визначимо кут α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{a}{2a} = 0,5,$$

звідси

$$\alpha = 26^{\circ}30' = 0,46 \text{ рад.}$$

1.1.6 Розподілені навантаження

Раніше було розглянуто сили, які умовно вважалися прикладеними в точці (насправді вони прикладені до площини, розмірами якої нехтують); такі сили називають зосередженими. У практиці часто зустрічаються сили, прикладені за об'ємом до поверхні тіла, наприклад сила тяжіння, тиск вітру або води і тому подібне. Такі сили називають розподіленими.

Плоска система розподілених сил характеризується її інтенсивністю, що зазвичай позначається q . Інтенсивність є силою, що припадає на одиницю довжини навантаженої ділянки. Інтенсивність в СО виражається в Н/м.

Розподілене навантаження, що має постійну інтенсивність, називається рівномірно розподіленим (рис. 1.15).

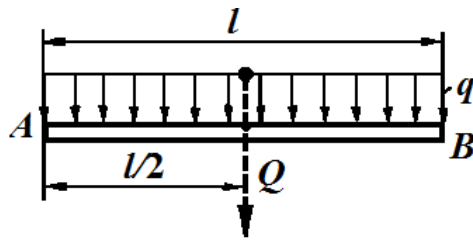


Рисунок 1.15

Під час розв'язання задач статички розподілене навантаження замінюють його рівнодійною. Модуль рівнодійного рівномірно розподіленого навантаження дорівнює

$$Q = ql. \quad (1.14)$$

Прикладена рівнодійна Q у середині відрізка AB .

Розподілене навантаження, що має змінну інтенсивність, називається нерівномірно розподіленим. Прикладом такого навантаження може бути змінний по висоті тиск води на греблю.

Навантаження, розподілене по поверхні, характеризується тиском, тобто натискання на одиницю площини. У СО тиск виражається в Паскалях (Па) або Н/м^2 .

1.2 Плоска система сил, що сходяться

1.2.1 Геометричний спосіб визначення рівнодійної плоскої системи сил, що сходяться

Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині і всі перетинаються в одній точці, називається плоскою системою сил, що сходяться.

Теорема. Плоска система сил, що сходяться, у загальному випадку еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодійної проходить через точку перетину ліній дії складових.

Нехай ця плоска система трьох сил F_1 , F_2 і F_3 , лінії дії яких сходяться в точці A . На підставі висновку з аксіом III і IV перенесемо ці сили уздовж ліній їхньої дії в точку A . Склавши перші дві сили F_1 і F_2 за правилом паралелограма, отримаємо їхню рівнодійну R (рис. 1.16, а):

$$R = F_1 + F_2. \quad (1.15)$$

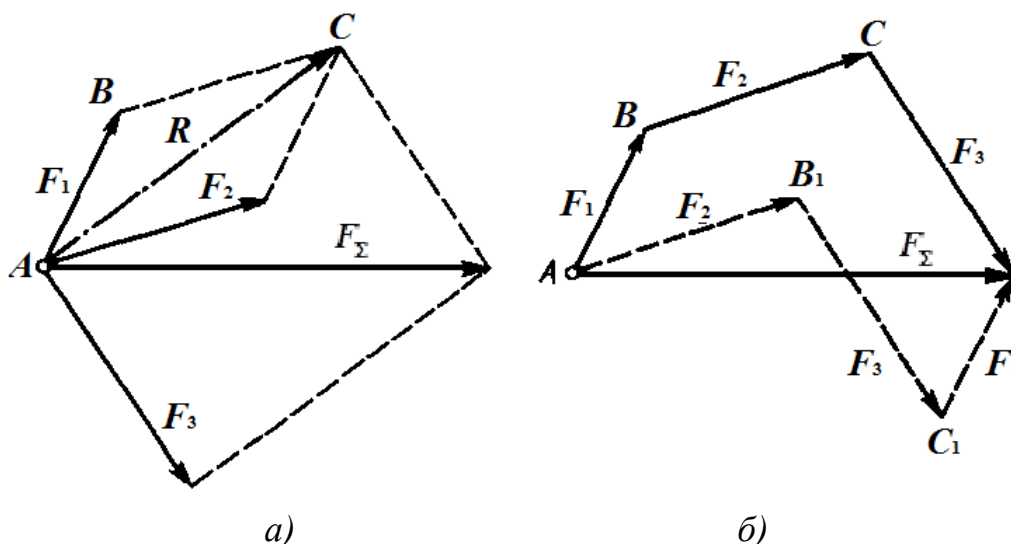


Рисунок 1.16

Користуючись тією самою аксіомою паралелограма, складемо рівнодійну R з силою F_3 :

$$F_{\Sigma} = R + F_3 = F_1 + F_2 + F_3, \quad (1.16)$$

де F_{Σ} – рівнодійна цієї системи трьох сил.

Аналогічні міркування можна провести для будь-якої кількості сил, внаслідок чого отримаємо

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n. \quad (1.17)$$

Скорочено це рівняння запишемо так:

$$F_{\Sigma} = \sum F_i, \quad (1.18)$$

де i – усі цілі числа від 1 до n , а грецька заголовна буква Σ (сигма) означає суму.

Зрозуміло, що побудову, виконану на рисунку 1.16, а, можна замінити простішою (рис. 1.16, б). Багатокутник $ABCD$ називається силовим багатокутником. Сторона AD , що поєднує початок першого з кінцем останнього вектора, називається замикаючою стороною.

Необхідно пам'ятати, що стрілки векторів складових сил утворюють певний напрямок обходу по контуру силового багатокутника, а замикаюча сторона, що визначає модуль і напрямок рівнодійної, має стрілку, направлену проти обходу (рис. 1.16, б).

Якщо визначити рівнодійну за допомогою геометрії і тригонометрії, то такий спосіб називатиметься геометричним.

Якщо зробити креслення силового багатокутника в певному масштабі, то рівнодійна визначиться простим виміром замикаючої сторони з подальшим множенням на масштаб. Такий спосіб знаходження рівнодійної називається графічним.

Порядок складання векторів під час побудови силового багатокутника на величину рівнодійної не впливає, оскільки векторна сума від зміни місць доданків не змінюється (рис. 1.16, б, багатокутник AB_1C_1D).

1.2.2 Геометрична умова рівноваги плоскої системи сил, що сходяться

Під час побудови силового багатокутника можливий випадок, коли кінець останнього вектора збігається з початком першого. У цьому випадку замикаючої сторони не буде, і такий силовий багатокутник називається замкнутим.

Очевидно, що рівнодійна F_Σ системи сил, що сходяться, дає замкнутий силовий багатокутник, що дорівнює нулю, і отже, ця система еквівалентна нулю, тобто знаходиться в рівновазі. Звідси витікає умова, із якої плоска система сил, що сходяться, знаходитиметься в рівновазі. Ця умова виражається рівнянням

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum F_i = 0, \quad (1.19)$$

і формулюється так: для рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник був замкнутим.

Умови рівноваги, записані у вигляді рівнянь, що містять невідомі величини, називаються рівняннями рівноваги.

Розв'язання більшості задач статки проводять в три етапи:

- обирають тіло, рівновага якого розглядатиметься;
- відкидають зв'язки, замінюючи їх реакціями, і встановлюють, яка система сил діє на тіло;
- користуючись умовами рівноваги, знаходять невідомі величини.

Під час розв'язання задач технічної механіки необхідно чітко дотримувати правило: розмірність і одиниці величин всіх доданків і обох частин рівності мають бути однаковими.

Користуючись цим правилом, доцільно в сумнівних випадках перевіряти правильність ходу розв'язання задач, для чого варто поставити в складових рівності одиниці всіх вхідних у нього величин, що перевіряються, і, зробивши можливі скорочення, порівняти отримані одиниці правої і лівої частин.

Перевіримо в такий спосіб наведену в 1.1.6 формулу $Q = ql$:

$$[Q] = [q] \cdot [l], \text{ Н} = (\text{Н/м}) \cdot \text{м} = \text{Н}. \quad (1.20)$$

Одиниці правої і лівої частин рівняння однакові, отже, формула по розмірності вірна.

Приклад 1.3. До вертикальної гладкої стіни на мотузку, що складає зі стіною кут α , підвішена однорідна куля (рис. 1.17). Визначити натягнення F мотузки і силу тиску P кулі на стіну, якщо сила тяжіння кулі G .

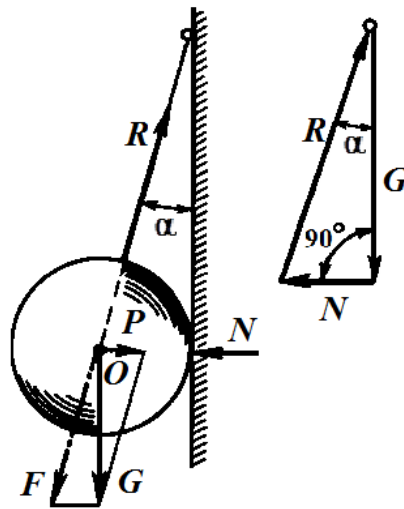


Рисунок 1.17

Розв'язання. Розглянемо рівновагу кулі. Застосувавши принцип звільненості, відкинемо зв'язки і замінимо їх реакціями. Реакція N гладкої стіни перпендикулярна стіні та проходить через центр кулі. Оскільки куля однорідна, то сила тяжіння G прикладена в його геометричному центрі. Реакція R направлена уздовж мотузки і, згідно з теоремою про рівновагу трьох непаралельних сил, її лінія дії також повинна проходити через центр кулі.

До системи трьох сил, що сходяться, прикладених до кулі, застосуємо геометричну умову рівноваги:

$$\sum F_i = 0; \quad G + N + R = 0.$$

Будуємо замкнутий силовий багатокутник, починаючи із зображення в довільному масштабі вектора відомої сили G .

Напрямок обходу трикутника (тобто напрямок стрілок) визначається цією силою. Розв'язуючи трикутник, отримаємо

$$N = G \operatorname{tg} \alpha, \quad R = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Шукана сила тиску P кулі на стіну, згідно з аксіомою взаємодії, за модулем дорівнює реакції N стіни, але направлена в протилежний бік:

$$P = N = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Натягнення F мотузки за модулем дорівнює її реакції R :

$$F = R = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Цю саме задачу можна розв'язати, розклавши силу тяжіння G по реальних напрямках (напрямам реакцій) на складові P (сила тиску кулі на стіну) і F (натягнення мотузка), до того ж, згідно з аксіомою взаємодії $F = R$, $P = N$.

З побудованого паралелограма (рис. 1.17) легко визначаємо шукані величини. Такий метод розв'язання задачі називають методом розкладання.

1.2.3 Проекції сили на осі координат

У тих випадках, коли на тіло діє більше трьох сил, а також коли невідомі напрямки деяких сил, зручніше під час розв'язання задачі користуватися не геометричною, а аналітичною умовою рівноваги, яка заснована на методі проекцій.

Проекцією сили на вісь називається відрізок осі, розташований між двома перпендикулярами, опущеними на вісь із початку і кінця вектора сили.

Нехай надані координатні осі x , y , сила P , прикладена в точці A і розташована в площині координатних осей (рис. 1.18).

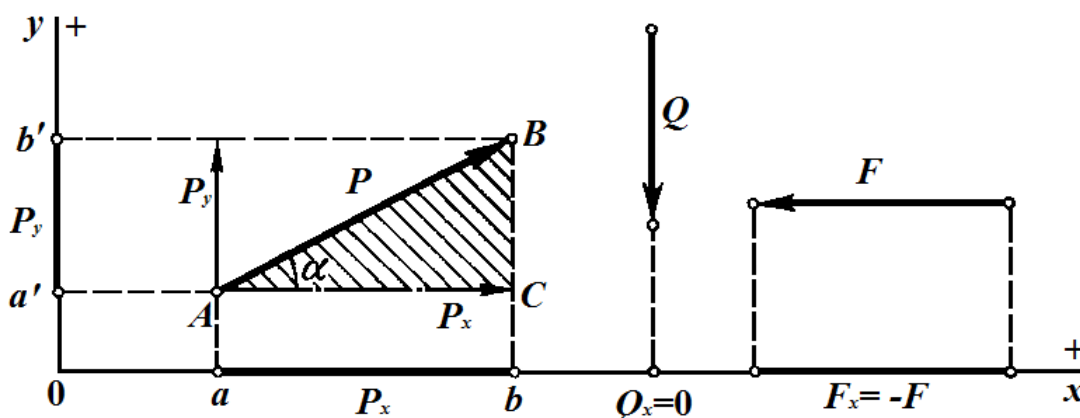


Рисунок 1.18

Проекціями сили P на осі будуть відрізки ab і $a'b'$. Позначимо ці проекції відповідно P_x і P_y . Тоді

$$P_x = P \cos \alpha; \quad P_y = P \sin \alpha. \quad (1.19)$$

Проекція сили на вісь є величиною алгебраїчною, яка може бути позитивною або негативною, що встановлюється за напрямком проекції. За напрямком проекції приймемо напрямок від проекції початку до проекції кінця вектора сили.

Встановимо таке правило знаків: якщо напрямок проекції сили на вісь збігається з позитивним напрямком осі, то ця проекція вважається позитивною, і навпаки.

Якщо вектор сили паралельний осі, то він проектується на цю вісь у натуральну величину (рис. 1.18, сила F).

Якщо вектор сили перпендикулярний осі, то його проекція на цю вісь дорівнює нулю (рис. 1.18, сила Q).

Знаючи дві проекції P_x і P_y , з трикутника ABC визначимо модуль і напрямок вектора сили P за такими формулами:

– модуль сили

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}; \quad (1.21)$$

– напрямний тангенс кута між вектором сили P і віссю x

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_y}{P_x}. \quad (1.22)$$

Відзначимо, що силу P можна представити як рівнодійну двох складових сил P_x і P_y паралельних осям координат (рис. 1.18). Складові P_x і P_y і проекції P_x і P_y принципово відрізняються одна від одної, оскільки складова є величиною векторною, а проекція – величиною алгебраїчною; але проекції сили на дві взаємно перпендикулярні осі x і y та модулі складових тієї саме сили відповідно чисельно рівні, коли сила розкладається по двох взаємно перпендикулярних напрямках, паралельних осям x і y .

1.2.4 Аналітичний спосіб визначення рівнодійної плоскої системи сил, що сходяться

Нехай є плоска система n сил, що сходяться

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n. \quad (1.23)$$

Рівнодійна цієї системи

$$F_{\Sigma} = \sum F_i. \quad (1.24)$$

У площині дії цієї системи виберемо вісь координат і спроектуємо дані сили і їхню рівнодійну на цю вісь.

Із математики відома властивість проекції векторної суми, на підставі якої можна стверджувати, що проекція рівнодійної на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на ту саме вісь, тобто

$$F_{\Sigma x} = \sum F_{ix}. \quad (1.25)$$

Праву частину цієї рівності записуємо спрощено, а саме:

$$F_{\Sigma x} = \sum X. \quad (1.26)$$

Для того щоб визначити рівнодійну будь-якої плоскої системи сил, що сходяться, спроектуємо їх на осі координат x і y , алгебраїчно складемо проекції всіх сил і знайдемо, у який спосіб проекції рівнодійної:

$$F_{\Sigma x} = \sum X, \quad F_{\Sigma y} = \sum Y. \quad (1.27)$$

Знаючи проекції, на підставі формул визначимо модуль і напрямок рівнодійної:

– модуль рівнодійної

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}; \quad (1.28)$$

– напрямний тангенс кута між вектором F_{Σ} і віссю x

$$\operatorname{tg}(F_{\Sigma}, x) = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma x}}. \quad (1.29)$$

Лінія дії рівнодійної проходить через точку перетину ліній дії складових сил.

1.2.5 Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил, що сходяться

Якщо є плоска система сил, що сходяться, знаходиться в рівновазі, то рівнодійна такої системи, а отже, і проекції рівнодійної на осі координат дорівнюють нулю:

$$F_{\Sigma} = 0, \quad F_{\Sigma x} = 0, \quad F_{\Sigma y} = 0. \quad (1.30)$$

Враховуючи, що

$$F_{\Sigma x} = \sum X, \quad F_{\Sigma y} = \sum Y, \quad (1.31)$$

отримуємо рівність, що виражає аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил, що сходяться:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0. \quad (1.32)$$

Формулюються ці умови так: для рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій цих сил на кожну з двох координатних осей дорівнювала нулю.

За допомогою рівнянь рівноваги можна визначити два невідомі елементи певної системи сил, наприклад модуль і напрямок однієї сили або модулі двох сил, напрямки яких відомі, і тому подібне.

Виведені умови рівноваги справедливі для будь-яких осей координат, але для спрощення розв'язання задач рекомендується осі координат вибирати, якщо можливо, перпендикулярними невідомим силам, щоб кожне рівняння рівноваги містило одне невідоме.

Коли напрямок шуканої сили невідомий, її можна розкласти на дві складові по заданих напрямках, зазвичай по напрямках координатних осей; за знайденими двома взаємно перпендикулярними складовими легко визначається невідома сила.

Якщо під час розв'язання задач аналітичним способом шукана реакція вийде негативною, то це означає, що дійсний її напрямок протилежний до напрямку, прийнятого на рисунку.

Приклад 1.4 Однорідна прямокутна пластинка силою тяжіння $G = 5 \text{ Н}$ підвішена так, що може вільно обертатися довкола горизонтальної осі, що проходить уздовж однієї з її сторін. Вітер, що рівномірно дує, утримує її в похилому положенні під кутом $\alpha = 18^\circ$ до вертикальної площини. Визначити рівнодійну P тиску, вироблюваного вітром на пластинку перпендикулярно її площини (рис. 1.19, а).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу пластинки. Відкинемо шарнір O . Оскільки пластинка однорідна і прямокутної форми, то рівнодійна P тиску вітру і сила тяжіння G перетинаються в геометричному центрі C пластинки; лінія дії реакції R_0 шарніра на підставі теореми про рівновагу трьох непаралельних сил також пройде через точку C . Для системи трьох сил, що сходяться та діють на пластинку, застосуємо аналітичну умову

рівноваги $\sum Y = 0$, направивши вісь y перпендикулярно пластинці (щоб реакція R_0 , яку не потрібно визначати, не увійшла до рівняння рівноваги). Складемо рівняння рівноваги

$$\sum Y = 0; \quad P - G \sin \alpha = 0,$$

звідки

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ = 5 \times 0,309 \approx 1,55 \text{ Н.}$$

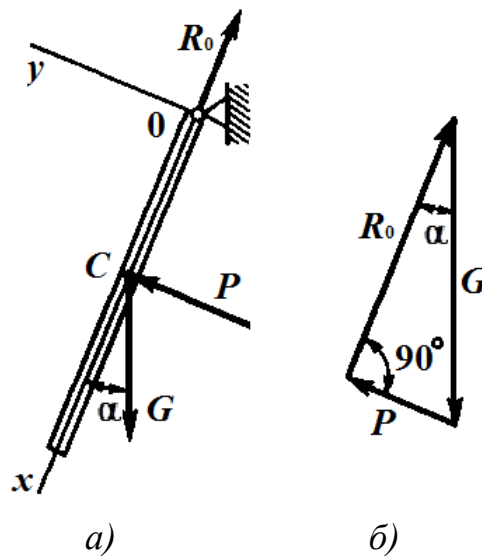


Рисунок 1.19

Проведемо перевірку розв'язання задачі за допомогою геометричної умови рівноваги:

$$\sum F_i = 0; \quad G + P + R_0 = 0.$$

Побудуємо замкнутий силовий трикутник (рис. 1.19, б). Розв'язуючі його, отримаємо

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ \approx 1,55 \text{ Н.}$$

1.3 Плоска система паралельних сил і момент сили

1.3.1 Складання двох паралельних сил, спрямованих в один бік

Система сил, лінії дії яких паралельні і лежать в одній площині, називається плоскою системою паралельних сил.

З фізики відомо (рис. 1.20), що дві паралельні сили, спрямовані в один бік, еквівалентні рівнодійній, яка дорівнює сумі цих сил, паралельна їм і направлена в той саме бік; лінія дії рівнодійної ділить відрізок, що поєднує точки прикладання цих сил, на частини, зворотно пропорційна до цих сил:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (1.33)$$

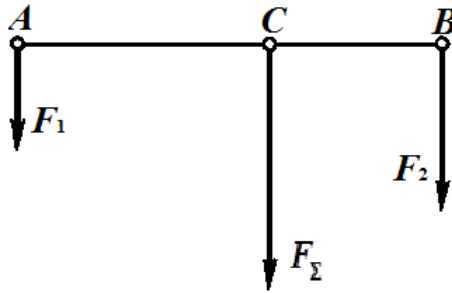


Рисунок 1.20

Застосовуючи похідну пропорцію, можна записати:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_1 + F_2}{DC + AC}, \quad (1.34)$$

тоді

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_{\Sigma}}{AB}. \quad (1.35)$$

Розкладання цієї сили на дві паралельні складові здійснюється за допомогою формул складання двох паралельних сил.

Розкладання сили на дві паралельні складові є задачею невизначеною, такою, що має незліченну кількість розв'язань. Для того щоб задача мала певне розв'язання, необхідно мати дві додаткові умови, наприклад модуль однієї складової і довжину одного плеча, довжини двох плечей і тому подібне.

1.3.2 Складання двох нерівних антипаралельних сил

Розглянемо випадок складання двох не рівних за модулем антипаралельних сил. Випадок, коли такі сили рівні за модулем, особливий і буде розглянутий надалі.

Теорема. Дві нерівні антипаралельні сили еквівалентні рівнодійній, яка дорівнює різниці цих сил, паралельна їм і направлена у бік більшої сили, лінія дії рівнодійної ділить відрізок, що з'єднує точки прикладання цих сил, зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні до цих сил.

Розглянемо дві паралельні сили F_1 і F_2 , де $F_1 > F_2$ (рис. 1.21). Розкладемо силу F_1 на дві паралельні складові F_Σ і F'_2 так, щоб складова F'_2 була прикладена в точці B і $F'_2 = F_2$. Тоді на підставі теореми про складання двох паралельних сил, спрямовані в один бік, отримаємо

$$F_1 = F_\Sigma + F'_2, \quad \frac{F_1}{BC} = \frac{F'_2}{AC} = \frac{F_\Sigma}{AB}. \quad (1.36)$$

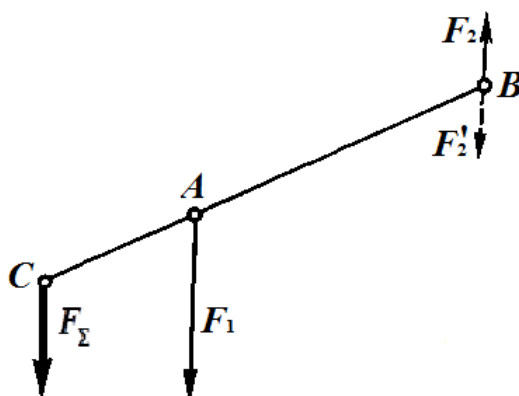


Рисунок 1.21

Із цієї рівності знайдемо модуль другої складової F_Σ і відстань AC до точки її прикладання (відомо, що $F'_2 = F_2$).

Ця система сил (F_1, F_2) замінена системою трьох сил:

$$(F_1, F_2) \equiv (F_\Sigma, F'_2, F_2). \quad (1.37)$$

Відкинувши на підставі аксіоми IV дві взаємно урівноважені сили F_2 і F'_2 , отримаємо, що ця система еквівалентна одній силі, тобто рівнодійній F_Σ :

$$(F_1, F_2) \equiv F_\Sigma. \quad (1.38)$$

Модуль і точка прикладання рівнодійної визначаються за формулами

$$F_\Sigma = F_1 - F_2, \quad AC = \frac{F_2}{F_\Sigma} AB. \quad (1.39)$$

Відзначимо, що рівнодійна двох паралельних сил дорівнює їхній алгебраїчній сумі.

Якщо на тіло діє система n паралельних сил, то, здійснюючи послідовне складання спочатку двох сил, їхній рівнодійної з третьою силою, нової рівнодійної з четвертою силою і так далі, знайдемо модуль і лінію дії рівнодійної всієї системи паралельних сил.

Очевидно, що рівнодійна системи паралельних сил визначиться в результаті алгебраїчного складання сил цієї системи:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n. \quad (1.40)$$

Таким чином, рівнодійна системи паралельних сил дорівнює їхній алгебраїчній сумі:

$$F_{\Sigma} = \sum F_i. \quad (1.41)$$

Питання про положення лінії дії рівнодійної легко вирішується за допомогою відповідної теореми.

1.3.3 Момент сили відносно точки

Розглянемо гайку, яку затягують гайковим ключем певної довжини, прикладаючи до кінця ключа мускульне зусилля. Якщо узяти гайковий ключ у кілька разів довший, то докладаючи те саме зусилля, гайку можна затягнути значно сильніше. З цього виходить, що одна і та сама сила може надавати різну обертальну дію. Обертальна дія сили характеризується моментом сили.

Моментом сили відносно точки називається добуток модуля сили на її плече (рис. 1.22):

$$M_0(F) = Fh. \quad (1.42)$$

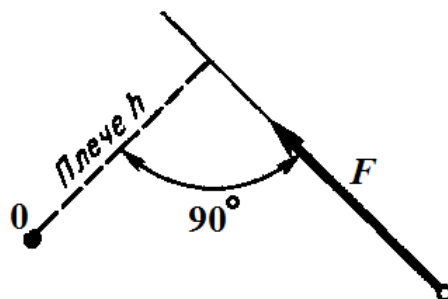


Рисунок 1.22

Точка, відносно якої береться момент, називається центром моменту. Плечем сили відносно точки називається найкоротша відстань від центру моменту до лінії дії сили.

Одиниця моменту сили:

$$[M]=[F][h]= \text{сила} \cdot \text{довжина} = \text{н'ютон} \cdot \text{метр} = \text{Н} \cdot \text{м}. \quad (1.43)$$

Умовимося вважати момент сили позитивним, якщо сила прагне обернути своє плече довкола центра моменту проти годинникової стрілки, і навпаки (рис. 1.23).

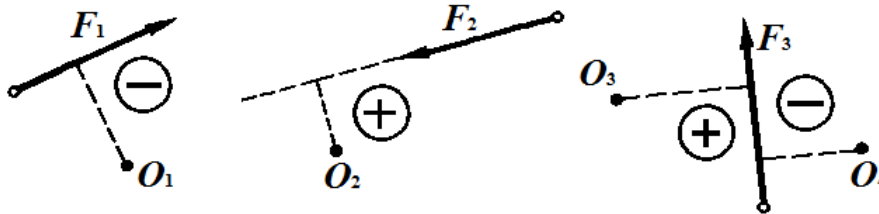


Рисунок 1.23

Одна і та сама сила відносно різних точок може давати і позитивний, і негативний момент (рис. 1.23, сила F_3).

Момент сили відносно точки, що лежить на лінії дії цієї сили, дорівнює нулю, оскільки в цьому випадку плече дорівнює нулю.

З рисунку 1.24 видно, що момент сили відносно точки не змінюється у разі перенесення сили уздовж лінії її дії.

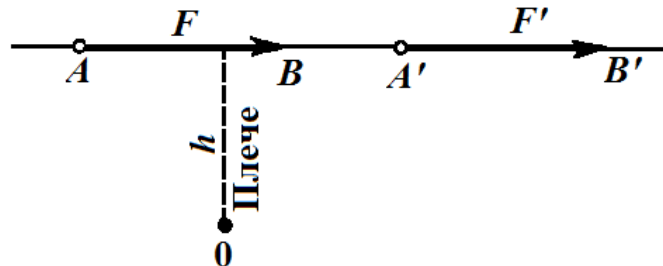


Рисунок 1.24

Це відбувається, оскільки модуль сили і плече залишаються незмінними.

1.4 Плоска система пар сил

1.4.1 Пара сил і момент пари

У випадку складання двох антипаралельних сил, рівних за модулем, система сил називається парою сил або просто парою (рис. 1.25).

Площина, у якій розташована пара, називається площиною дії пари. Відстань між лініями дії сил є плече пари. Ефект дії пари полягає у тому, що вона прагне обернути тіло, до якого пара прикладена. Її оберտальна дія визначається моментом пари.

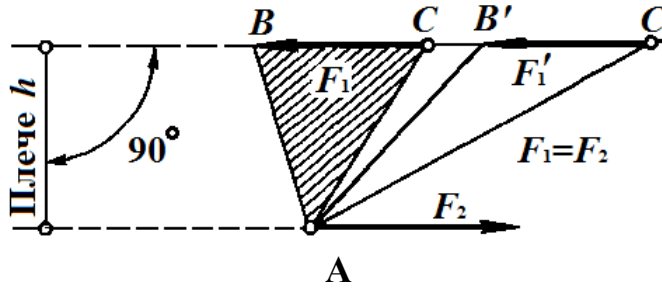


Рисунок 1.25

Моментом пари називається добуток модуля однієї з сил, що складають пару, на плече:

$$M(F_1, F_2) = F_1 h = F_2 h = m. \quad (1.44)$$

Момент пари і момент сили мають однакову розмірність.

Умовимося вважати момент пари позитивним, якщо вона прагне обернути своє плече проти годинникової стрілки, і навпаки.

Момент пари чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника, в якого основою є вектор однієї з сил пари, а висотою – плече, помножені на масштаби сили і плеча (рис. 1.25).

З рисунку 1.25 видно, що момент пари не змінюється при перенесенні сил уздовж ліній їхньої дії, оскільки трикутники ABC і $AB'C'$ – рівновеликі.

1.4.2 Основні властивості пари

Основні властивості пари характеризуються такими трьома теоремами.

Теорема I. Пара сил не має рівнодійної.

Надана пара (F_x, F_2) з плечем h (рис. 1.26).

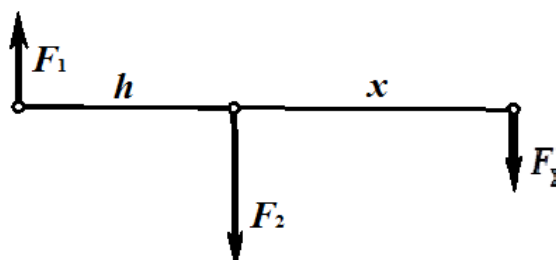


Рисунок 1.26

Передбачимо, що $F_2 > F_1$. Тоді рівнодійна цих сил $F_\Sigma = F_2 - F_1$, а точка її застосування визначається з пропорції

$$\frac{F_\Sigma}{F_1} = \frac{h}{x}, \text{ звідки } x = \frac{F_1 h}{F_\Sigma}. \quad (1.45)$$

Нехай тепер сила F_2 зменшується і наближається за модулем до сили F_1 , тоді в межі за $F_1 = F_2$

$$F_z = F_2 - F_1 = 0. \quad (1.46)$$

Це означає, що за $F_1 = F_2$ рівнодійна не існує.

З цієї теореми виходить, що пара сил не може бути урівноважена однією силою; пара сил може бути урівноважена лише парою.

Теорема II. Алгебраїчна сума моментів сил, що складають пару, відносно будь-якої точки площини дії пари є величина постійна, рівна моменту пари.

Надана пара (F_1, F_2) з плечем h (рис. 1.27) і моментом $m = F_1 h = F_2 h$.

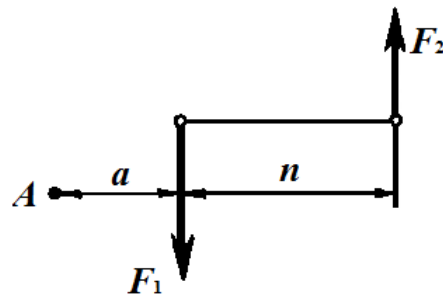


Рисунок 1.27

Виберемо в площині дії пари довільну точку A і прийmemo її за центр моментів:

$$\left. \begin{aligned} M_A(F_1) &= -F_1 a, \\ M_A(F_2) &= F_2(a + h). \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Складемо праві і ліві частини цієї рівності:

$$M_A(F_1) + M_A(F_2) = -F_1 a + F_2(a + h),$$

або

$$M_A(F_1) + M_A(F_2) = m.$$

Теорема доведена.

З цієї теореми виходить, що за будь-якого центра моментів пара сил увійде до рівняння моментів з одним і тим же знаком і однією і тією величиною.

Теорема III. Алгебраїчна сума проекцій сил пари на вісь завжди дорівнює нулю.

Надана пара (F_1, F_2) і вісь z , що лежить в площині дії пари (рис. 1.28). З рівності заштрихованих трикутників видно, що $F_{1z} = F_{2z}$. Проекція F_{1z} – позитивна, проекція F_{2z} – негативна, отже, їхня алгебраїчна сума завжди дорівнює нулю.

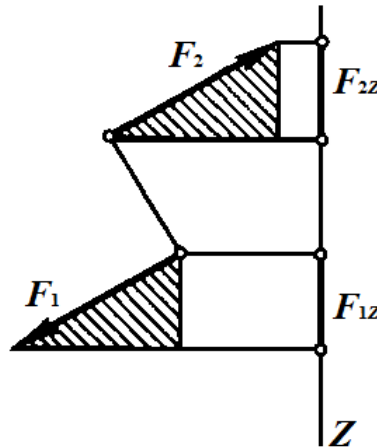


Рисунок 1.28

З цієї теореми виходить, що пара сил не входить ні в рівняння сил, ні в рівняння проекцій сил.

1.4.3 Еквівалентні пари

Дві пари називаються еквівалентними, якщо одну з них можна замінити іншою, не порушуючи механічного стану вільного твердого тіла.

Теорема про еквівалентні пари формулюється так: якщо моменти двох пар алгебраїчно рівні, то ці пари еквівалентні.

Дано дві пари (F, F_1) і (Q, Q_1) , моменти яких алгебраїчно рівні (рис. 1.29), тобто

$$M(F, F_1) = M(Q, Q_1) \text{ або } Fa = Qb. \quad (1.48)$$

Продовжимо лінії дії сил пари до їхнього взаємного перетину в точках A і B . На підставі наслідку з аксіом III і IV перенесемо сили F і F_1 уздовж ліній їхньої дії в точки A і B . З'єднаємо ці точки прямою лінією і розкладемо сили F і F_1 по напрямку AB і уздовж ліній дії сил Q і Q_1 . З рівності трикутників Akd і Bmn витікає, що $T = T_1$ і $S = S_1$.

Сили T і T_1 є урівноваженою системою, оскільки вони рівні за модулем і діють по одній прямій в протилежні боки. На підставі аксіоми IV таку систему можна відкинути.

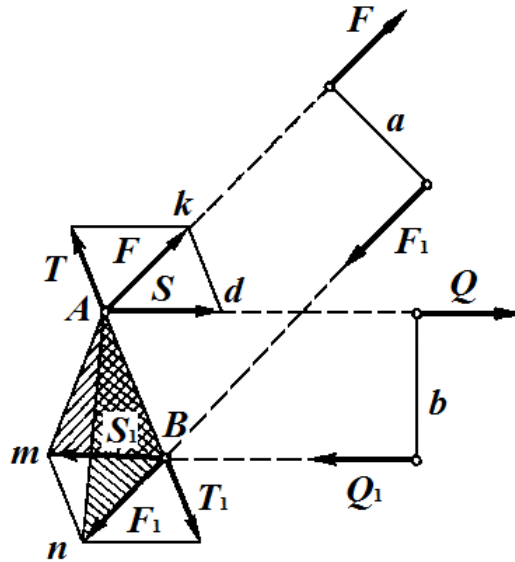


Рисунок 1.29

Сили S і S_1 є парою сил з плечем b .

Отже, пара $(F, F_1) \equiv$ парі (S, S_1) .

Розглянемо трикутник AmB і AnB . Вони мають загальну підставу AB , а висоти їхні рівні, отже,

$$S\Delta AmB = \Delta AnB.$$

Проте подвоєна площа ΔAnB чисельно дорівнює моменту пари (F, F_1) , а подвоєна площа ΔAmB чисельно дорівнює моменту пари (S, S_1) , отже,

$$M(F, F_1) = M(S, S_1) \text{ або } Fa = Sb.$$

За умовами теореми $Fa = Qb$, отже, $S\Delta AmB = S\Delta AnB$ $Sb = Qb$, звідси $S=Q$, $S_1=Q_1$.

Сили S і Q рівні за модулем, діють по одній прямій в один бік, отже, вони еквівалентні одна одній; на цієї саме підставі еквівалентні одна одній сили S_1 і Q_1 . Отже, пара $(Q, Q_1) \equiv$ парі (S, S_1) .

Проте вище доведено, що пара $(F, F_1) \equiv$ парі (S, S_1) .

Оскільки дві пари порізно еквівалентні одній і тій самій третій парі, то ці пари еквівалентні між собою, тобто пара $(F, F_1) \equiv$ парі (Q, Q_1) , що і потрібно було довести.

З доведеної теореми про еквівалентні пари витікає чотири висновки:

– не змінюючи механічного стану тіла, пари можна переміщати як завгодно в площині її дії;

– не змінюючи механічного стану тіла, можна міняти сили і плече пари, але так, щоб її момент залишався незмінним;

– щоб задати пару, достатньо задати її момент, тому інколи слово «пара» замінюють словом «момент» і умовно змальовують його так, як показано на рисунку 1.30;

– умови рівноваги плоскої системи паралельних сил будуть справедливими, якщо разом із такою системою діють і пари сил, оскільки їх можна обернути в площині дії і поставити сили пари паралельно іншим силам системи.

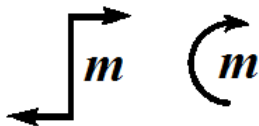


Рисунок 1.30

1.4.4 Теорема про складання пар

Теорема. Будь-яка плоска система пар еквівалентна одній результуючій парі, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів цих пар.

Нехай дано три пари з моментами m_1 , m_2 , m_3 , що діють в одній площині (рис. 1.31, а).

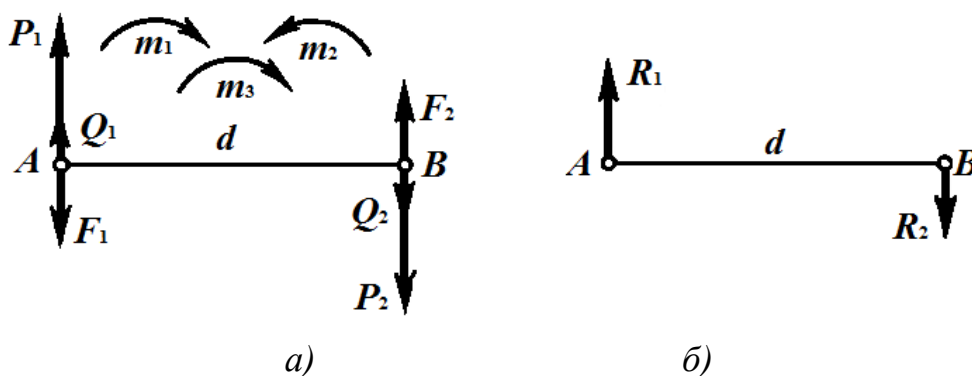


Рисунок 1.31

На підставі висновку з теореми про еквівалентні пари перетворимо ці пари так, щоб їхні плечі стали рівними d , і перенесемо до довільно узятото на площині відрізка AB завдовжки d .

Тоді замість заданої системи пар отримаємо нову систему, еквівалентну цій, де моменти даних і нових пар будуть рівними, тобто

$$m_1 = -P_1 d, \quad m_2 = F_1 d, \quad m_3 = -Q_1 d. \quad (1.49)$$

Склавши три сили в точці A , отримаємо рівнодійну R_1 (рис. 1.31, б), модуль якої

$$R_1 = P_1 + Q_1 - F_1. \quad (1.50)$$

Склавши три сили в точці B , отримаємо рівнодійну R_2 , модуль якої

$$R_2 = P_2 + Q_2 - F_2, \quad (1.51)$$

де очевидно, що сили R_1 і R_2 рівні за модулем, паралельні та протилежно направлені.

Отже, система (R_1, R_2) є парою з плечем d , еквівалентна цій системі пар. Момент цієї результуючої пари

$$m = -R_1 d = -(P_1 + Q_1 - F_1) d = -P_1 d - Q_1 d + F_1 d, \quad (1.52)$$

або

$$m = m_1 + m_2 + m_3. \quad (1.53)$$

Аналогічний доказ можна навести для будь-якої плоскої системи пар, тобто в загальному вигляді можна записати

$$m = \sum m_i. \quad (1.54)$$

що і потрібно було довести.

1.4.5 Умова рівноваги плоскої системи пар

Застосовуючи доведену в попередньому розділі теорему до плоскої системи пар, що знаходиться в рівновазі, запишемо

$$m = \sum m_i = 0. \quad (1.55)$$

Тому умова рівноваги плоскої системи пар у загальному вигляді виглядатиме так:

$$\sum m_i = 0, \quad (1.56)$$

а формулюється таким чином: для рівноваги плоскої системи пар необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнювала нулю.

1.4.6 Опори й опорні реакції балок

Опори балок за їхньою будовою можуть бути розділені на такі три основних типи (рис. 1.32):

- шарнірно-рухлива (опора A);
- шарнірно-нерухома (опора B);
- жорстке закладення (опора C).

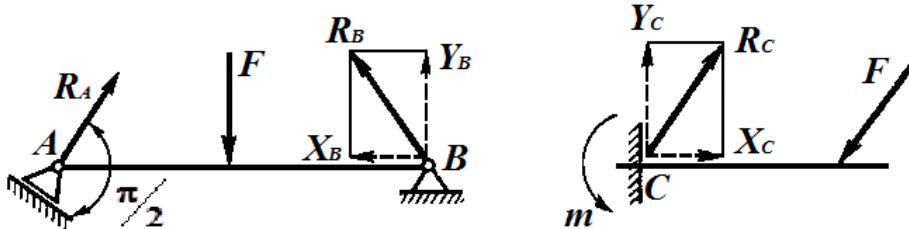


Рисунок 1.32

Застосуємо правило для визначення напрямку реакцій зв'язків.

Шарнірно-рухлива опора допускає поворот довкола осі шарніра і лінійне переміщення паралельно опорній площині. Якщо нехтувати тертям на опорі і в шарнірі, то реакція такого зв'язку буде направлена перпендикулярно опорній площині і невідома лише за модулем (одне невідоме).

Шарнірно-нерухома опора допускає лише поворот довкола осі шарніра і не допускає жодних лінійних переміщень. Реакція такої опори буде направлена перпендикулярно осі шарніра; модуль і напрямок її заздалегідь не відомі (два невідомих). Зазвичай під час розв'язання задачі таку реакцію розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові, невідомі за модулем, але відомі за напрямком.

Жорстке закладення (затискання) не допускає ні лінійних переміщень, ні поворотів затисненого кінця балки. Жорстке закладення замінюють реактивною силою, не відомою за модулем і напрямком, і реактивним моментом (три невідомих). Реактивну силу, невідому за напрямком, розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові.

Якщо під час розв'язання задачі реактивна сила або реактивний момент вийдуть негативними, то їхній дійсний напрямок протилежний до прийнятого на рисунку.

Окрім перерахованих вище трьох основних типів опор балок у конструкціях нерідко балка вільно спирається на площину (поверхню) або на ребро призми.

Приклад 1.5 Горизонтальна балка завдовжки $l = 4$ м закріплена на опорах (рис. 1.33) і навантажена парою сил із моментом $m = 420$ Н · м. Не враховуючи силу тяжіння балки, визначити реакції опор A і B .

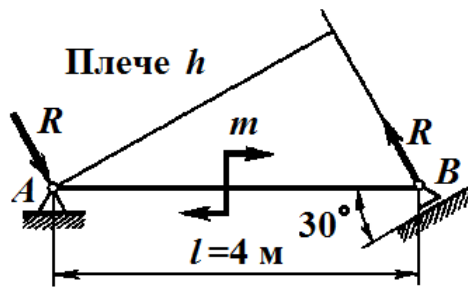


Рисунок 1.33

Розв'язання. Відкинемо опори, замінивши їх реакціями, і розглянемо рівновагу балки. Оскільки пару сил можна зрівноважити лише парою, то реакції R опор A і B повинні утворювати пару сил, де реакція шарнірно-рухливої опори B перпендикулярна опорній площині.

Застосуємо умову рівноваги плоскої системи пар і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum m_i = 0; \quad -m + Rh = 0.$$

де $h = l \cos 30^\circ$.

Звідси

$$R = \frac{m}{h} = \frac{m}{l \cos 30^\circ} = \frac{420}{4 \times 0,866} \approx 120 \text{ Н.}$$

Приклад 1.6 Консольна балка (рис. 1.34) завдовжки $l = 2$ м завантажена на кінці силою $F = 3\,000$ Н. Не враховуючи силу тяжіння балки, визначити реакції закладення.

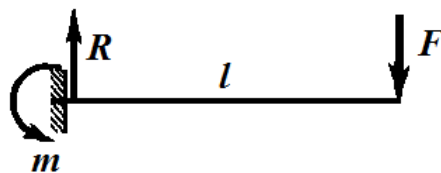


Рисунок 1.34

Розв'язання. Відкинемо закладання, замінивши його реакціями, і розглянемо рівновагу балки. Реакції закладення є реактивною силою R і реактивним моментом m . Оскільки реактивний момент m може бути урівноважений лише парою сил, то навантаження F і реакція R повинні утворювати пару, отже,

$$R = F = 3\,000 \text{ Н.}$$

Далі застосуємо умову рівноваги плоскої системи пар і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum m_i = 0; \quad m - Fl = 0,$$

звідки

$$m = Fl = 3\,000 \times 2 = 6\,000 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

1.5 Плоска система довільно розташованих сил

1.5.1 Теорема про паралельне перенесення сили

Теорема. Механічний стан твердого тіла не порушиться, якщо цю силу перенести паралельно самій собі в довільну точку тіла, додавши пару, момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно нової точки прикладання.

Візьмемо тіло, що знаходиться під дією деякої системи сил, серед яких є сила F , прикладена в точці A (рис. 1.35). Виберемо довільну точку O , яку назовемо центром приведення, і на підставі аксіоми IV прикладемо в цій точці дві рівні сили F' і F'' , паралельні силі F , де

$$F' = F'' = F. \quad (1.57)$$

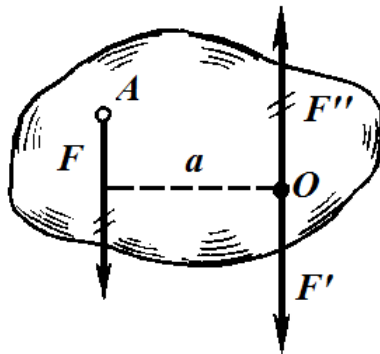


Рисунок 1.35

Систему сил (F, F', F'') , еквівалентну силі F , представимо як силу F , перенесену паралельно самій собі в довільно вибраний центр приведення O , і пару (F', F'') , момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно центра приведення O , що є новою точкою прикладання сили:

$$M(F, F'') = Fa = M_0(F). \quad (1.58)$$

Теорема доведена.

Описане вище перенесення сили можна показати на прикладі. Розглянемо колесо A радіусом r , що обертається на осі в підшипниках (рис. 1.36). Нехай до обода колеса по дотичній прикладена сила F (таку силу називають окружною).

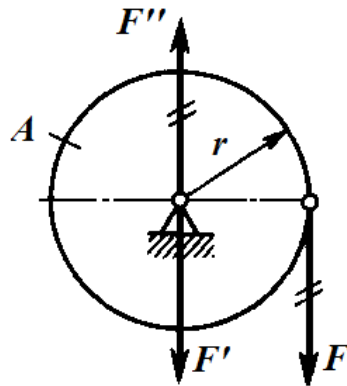


Рисунок 1.36

Для визначення дії сили F на колесо і підшипники застосуємо доведену теорему і перенесемо цю силу паралельно самій собі на вісь колеса. У результаті отримаємо силу $F' = F$, що викликає тиск на підшипники, і пару сил (F, F'') з моментом, рівним Fr , яка обертатиме колесо.

1.5.2 Приведення плоскої системи довільно розташованих сил до визначеного центра

Приведенням системи сил називається заміна її іншою системою, еквівалентною першій, але простішою.

Теорема. Плоска система довільно розташованих сил у загальному випадку еквівалентна одній силі, прикладеній в центрі приведення, і одній парі.

Хай дано плоску систему n довільно розташованих сил $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}, F_n)$. Перенесемо паралельно всі сили в довільно вибраний в площині дії сил центр приведення O , додавши n пар (рис. 1.37). Моменти цих пар $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ дорівнюють моментам цих сил відносно центра приведення O .

Замість заданої системи n довільно розташованих сил отримаємо систему n сил, прикладених у центрі приведення, рівних цим силам за модулем і однакових із ними за напрямком, і систему n приєднаних пар:

$$F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, F'_3 = F_3, \dots, F'_n = F_n; \quad (1.59)$$

$$m_1 = M_0(F_1), m_2 = M_0(F_2), m_3 = M_0(F_3), \dots, m_n = M_0(F_n), \quad (1.60)$$

Ця нова система еквівалентна існуючій.

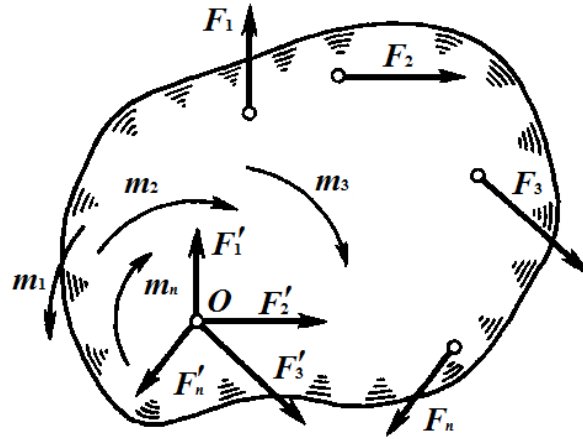


Рисунок 1.37

Плоска система сил, прикладених в одній точці, еквівалентна одній силі, яка дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій самій точці, отже

$$F'_1 + F'_2 + F'_3 + \dots + F'_n = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{\text{гол}} \quad (1.61)$$

або

$$F_{\text{гол}} = \sum F_i. \quad (1.62)$$

Цю силу назвемо головним вектором цієї системи. Головний вектор плоскої системи довільно розташованих сил дорівнює векторній сумі всіх сил системи і прикладений у центрі приведення.

Графічно головний вектор виражається замикаючою стороною силового багатокутника, побудованого на цих силах. Аналітично модуль головного вектора можна обчислити за формулою:

$$F_{\text{гол}} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}, \quad (1.63)$$

а напрямний косинус – за формулою:

$$\cos(F_{\text{гол}}, x) = \frac{F_{\text{гол}x}}{F_{\text{гол}}}. \quad (1.64)$$

Плоска система пар еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів цих пар, отже

$$M_{\text{гол}} = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = M_0(F_1) + M_0(F_2) + M_0(F_3) + \dots + M_0(F_n), \quad (1.65)$$

або

$$M_{\text{гол}} = \sum M_0(F_i). \quad (1.66)$$

Цю пару з моментом $M_{\text{гол}}$ назовемо головним моментом заданої системи сил.

Головний момент плоскої системи довільно розташованих сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно центра приведення.

Таким чином, усяка плоска система сил у загальному випадку еквівалентна системі, що складається з сили і пари сил, отже, теорема доведена.

1.5.3 Властивості головного вектора і головного моменту

Властивості головного вектора і головного моменту:

– модуль і напрямок головного вектора певної системи не залежать від вибору центра приведення, оскільки за будь-якого центру приведення силовий багатокутник, побудований на цих силах, буде один і той самий;

– величина і знак головного моменту в загальному випадку залежать від вибору центра приведення, оскільки за зміни центра приведення змінюються плечі сил, а їхні модулі залишаються незмінними;

– головний вектор і рівнодійна системи сил векторно рівні, але в загальному випадку не еквівалентні. Нехай відомі головний вектор $F_{\text{гол}}$ і головний момент $M_{\text{гол}}$ будь-якої плоскої системи сил (рис. 1.38). Визначимо рівнодійну цієї системи.

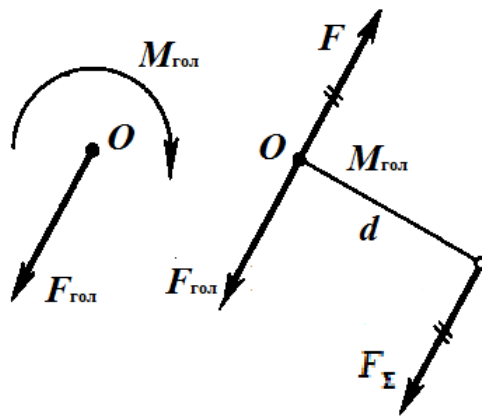


Рисунок 1.38

Користуючись відомою властивістю пари сил, перетворимо головний момент $M_{\text{гол}}$ так, щоб сили пари F і F_{Σ} були паралельні і за модулем дорівнювали головному вектору $F_{\text{гол}}$:

$$F_{\Sigma} = F = F_{\text{гол}}, \quad M_{\text{гол}} = M(F_{\Sigma}, F), \quad (1.67)$$

де сила F прикладена до точки O протилежно $F_{\text{гол}}$.

Далі систему $(F_{\text{гол}}, F)$ як взаємно урівноважену відкинемо:

$$(F_{\text{гол}}, M_{\text{гол}}) \equiv (F_{\text{гол}}, F, F_{\Sigma}) \equiv F_{\Sigma}. \quad (1.68)$$

У результаті отримали одну силу F_{Σ} , еквівалентну головному вектору і головному моменту, тобто рівнодійну системи, де

$$F_{\Sigma} = F_{\text{гол}}. \quad (1.69)$$

Модуль рівнодійної

$$F_{\Sigma} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} = F_{\text{гол}}, \quad (1.70)$$

а положення лінії дії рівнодійною визначається плечем d за формулою

$$d = \frac{M_{\text{гол}}}{F_{\text{гол}}}. \quad (1.71)$$

У результаті можна вважати встановленим, що головний вектор і рівнодійна векторно рівні, але не еквівалентні;

– головний вектор і рівнодійна еквівалентні лише в окремому випадку, коли головний момент системи дорівнює нулю; останнє можливо у разі, коли центр приведення знаходиться на лінії дії рівнодійної.

Момент рівнодійної F_{Σ} відносно центра приведення O дорівнює моменту $M_{\text{гол}}$ пари (F_{Σ}, F) , тобто головному моменту цієї системи:

$$M_0(F_{\Sigma}) = M(F_{\Sigma}, F) = M_{\text{гол}}. \quad (1.72)$$

Оскільки $M_{\text{гол}} = \sum M_0(F_i)$, а за центр приведення можна узяти будь-яку точку площини дії сил цієї системи, то завжди маємо

$$M(F_{\Sigma}) = \sum M(F_i). \quad (1.73)$$

Отримана формула є математичним вираженням теореми про момент рівнодійної.

Теорема. Момент рівнодійної сили відносно якої-небудь точки, розташованої в площині дії сил, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї саме точки.

Теорему про момент рівнодійної вперше довів французький вчений Варіньон, тому її називають теоремою Варіньона.

Застосуємо доведену теорему для визначення положення лінії дії рівнодійної F_{Σ} плоскої системи n паралельних сил:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \equiv F_{\Sigma}. \quad (1.74)$$

Виберемо будь-яку точку O площині дії сил за центр моментів і згідно з теоремою Варіньона запишемо

$$\sum M_0(F_i) = M_0(F_\Sigma) = F_\Sigma d, \quad (1.75)$$

де d – плече рівнодійною відносно точки O .

З останньої рівності визначаємо плече d :

$$d = \frac{\sum M_0(F_i)}{F_\Sigma} = \frac{\sum M_0(F_i)}{\sum F_i}, \quad (1.76)$$

оскільки $F_\Sigma = \sum F_i$.

Щоб встановити, у який бік від точки O потрібно на перпендикулярі до ліній дії сил відкласти плече d , варто врахувати, по-перше, напрямок вектора F_Σ і, по-друге, знак $\sum M_0(F_i)$.

1.5.4 Різні випадки приведення плоскої системи довільно розташованих сил

Вивчивши властивості головного вектора і головного моменту, вкажемо чотири можливі випадки приведення плоскої системи довільно розташованих сил:

– $F_{\text{гол}} \neq 0, M_{\text{гол}} \neq 0$, тобто головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю. У цьому випадку система сил еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює за модулем головному вектору, паралельна йому, направлена в той саме бік, але по іншій лінії дії;

– $F_{\text{гол}} \neq 0, M_{\text{гол}} = 0$. У цьому випадку система сил еквівалентна рівнодійною, лінія дії якої проходить через центр приведення і збігається з головним вектором;

– $F_{\text{гол}} = 0, M_{\text{гол}} \neq 0$. У цьому випадку система еквівалентна парі. Оскільки модуль і напрямок головного вектора у всіх випадках не залежать від вибору центра приведення, то в цьому разі величина і знак головного моменту теж не залежать від центра приведення, оскільки одна і та сама система сил не може бути еквівалентна різним парам;

– $F_{\text{гол}} = 0, M_{\text{гол}} = 0$. У цьому випадку система сил еквівалентна нулю, тобто знаходиться в рівновазі.

1.5.5 Аналітичні умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил

Плоска система довільно розташованих сил знаходиться в рівновазі, коли і головний вектор, і головний момент дорівнюють нулю:

$$F_{\text{гол}} = 0, M_{\text{гол}} = 0. \quad (1.77)$$

Проте $F_{\text{гол}} = \sum F_i$ і рівність $F_{\text{гол}} = 0$ означає, що силовий багатокутник, побудований на силах цієї системи, має бути замкнутий, отже, алгебраїчна сума проекцій сил на кожну з двох осей координат x і y повинна дорівнювати нулю, тобто

$$\sum X = 0, \sum Y = 0. \quad (1.78)$$

Головний момент $M_{\text{гол}} = \sum M_0(F_i)$ і рівність $M_{\text{гол}} = 0$ означають, що алгебраїчна сума моментів сил цієї системи відносно будь-якого центру приведення дорівнює нулю, отже,

$$\sum M(F_i) = 0. \quad (1.79)$$

Отже, для рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі координат x і y дорівнювали нулю і щоб алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

Умови рівноваги спрощено запишемо у вигляді рівності

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0. \quad (1.80)$$

Відзначимо, що виведені раніше умови рівноваги системи сил, що сходяться, системи паралельних сил і системи пар є окремими випадками умов рівноваги, отриманих в цьому розділі.

Під час розв'язання деяких задач буває доцільно замість одного або двох рівнянь проекцій складати рівняння моментів.

Якщо замінити одне рівняння проекцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил виглядатимуть так:

$$\sum X = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0. \quad (1.81)$$

Проте варто пам'ятати, що ці умови стають недостатніми для рівноваги, коли центри моментів A і B лежать на одному перпендикулярі до осі x ; у цьому випадку навіть у разі виконання вказаних умов система сил може мати рівнодійну, таку, що проходить через ці точки, і, отже, не бути в рівновазі.

Якщо замінити два рівняння проекцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил виглядатимуть так:

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0. \quad (1.82)$$

Проте ці умови стають недостатніми для рівноваги, коли центри моментів A , B і C лежать на одній прямій; у цьому випадку навіть у разі виконання вказаних умов система сил може мати рівнодійну, таку, що проходить через ці точки, і, отже, не бути в рівновазі.

Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил є окремим випадком умов рівноваги, виведених у цьому параграфі. Якщо вісь u розташувати паралельно лініям дії системи паралельних сил, то рівняння рівноваги $\sum X = 0$ обернеться в тотожність, а $\sum Y = \sum F_i$ алгебраїчна сума проєкцій сил системи на вісь u дорівнюватиме алгебраїчній сумі цих сил. Тоді умови рівноваги плоскої системи паралельних сил запишуться у такий спосіб:

$$\sum F_i = 0, \sum M = 0. \quad (1.83)$$

Формулюються так: для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума всіх сил дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

Під час розв'язання задач статички аналітичним способом доцільно складати рівняння рівноваги так, щоб у кожному з них була лише одна невідома величина. У багатьох випадках цього можна досягти, якщо раціонально вибрати осі координат і центри моментів.

Приклад 1.7. Горизонтальна балка, що підтримує балкон, піддається дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 2$ кН/м (рис. 1.39). На балку у вільного кінця C передається навантаження від колони $P = 2$ кН. Відстань від осі колони до стіни $l = 1,5$ м. Визначити реакції закладення A .

Розв'язання. Відкинемо закладення, замінимо його реакціями і розглянемо рівновагу балки. Реакції стіни є реактивною силою R і реактивний момент m . Реактивна сила вертикальна, оскільки активні сили, що діють на балку, горизонтальних складових не мають. Розподілене навантаження замінимо її рівнодійною ql .

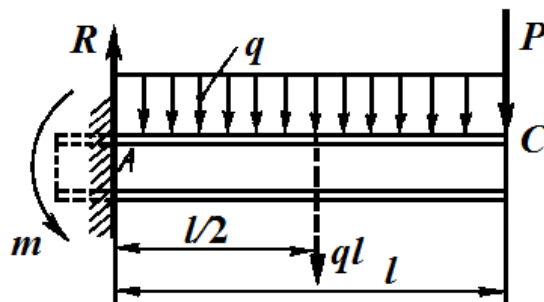


Рисунок 1.39

Застосуємо умови рівноваги плоскої системи паралельних сил і складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum F_i = 0; R - ql - P = 0,$$

звідки

$$R = ql + p = 2 \times 10^3 \times 1,5 + 2 \times 10^3 = 5 \times 10^3 \text{ Н},$$

$$\sum M_A = 0; +m - \frac{ql^2}{2} - Pl = 0.$$

Звідси

$$m = Pl + \frac{ql^2}{2} = 2 \times 10^3 \times 1,5 + 2 \times 10^3 \times \frac{2,25}{2} = 5,25 \times 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Перевіримо рішення, склавши контрольне рівняння моментів відносно точки C :

$$\sum M_C = 0; m - Rl + \frac{ql^2}{2} = 0.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$5,25 \times 10^3 - 5 \times 10^3 + 2 \times 10^3 \times \frac{2,25}{2} = 0.$$

Отримана тотожність $0 = 0$ свідчить, що рішення вірне.

Приклад 1.8. Запобіжний клапан A парового казана з'єднаний стрижнем AB з однорідним важелем CD довжиною 50 см і силою тяжіння 10 Н, який може обертатися довкола нерухомої осі C ; діаметр клапана $d = 6$ см, плече $CB = 1$ см (рис. 1.40). Який вантаж G потрібно підвісити до кінця D важеля для того, щоб клапан сам відкривався за тиску в казані $p = 110 \text{ Н/см}^2$?

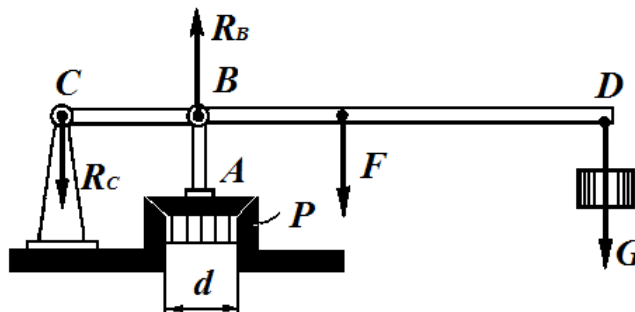


Рисунок 1.40

Розв'язання. Розглянемо рівновагу важеля CD . Реакція R_B клапана буде направлена вгору і дорівнюватиме

$$R_B = \frac{p\pi d^2}{4} = \frac{110 \times 10^4 \times \pi 36 \times 10^{-4}}{4} = 3109 \text{ Н.}$$

Оскільки реакцію R_C шарніру C визначати не потрібно, то складемо рівняння моментів відносно точки C :

$$\sum M_C = 0; -G \cdot CD - \frac{F \cdot CD}{2} + R_B \cdot CB = 0.$$

Підставимо значення і визначимо G :

$$G = \frac{3109 \times 7 \times 10^{-2} - 10 \times 25 \times 10^{-2}}{50 \times 10^{-2}} = 430 \text{ Н.}$$

Приклад 1.9. На рисунку 1.41 схематично змальований підйомний кран. У точці D на відстані 5 м від осі AB крану підвішений вантаж $P = 50$ кН. Сила тяжіння крану $G = 30$ кН. Визначити реакції підп'ятника A і підшипника B .

Розв'язання. Розглянемо рівновагу крану. Реакція R_B підшипника B направлена перпендикулярно його осі, реакцію підп'ятника A розкладемо на дві складові: X_A і Y_A . Таким чином, до крану прикладена плоска система п'яти довільно розташованих сил, з яких три невідомі. Застосуємо до цієї системи аналітичні умови рівноваги і складемо три рівняння:

$$\sum M_A = 0; + R_B \cdot 7 \text{ м} - G \cdot 1,5 - P \cdot 5 = 0,$$

$$\sum X = 0; -R_B + X_A = 0, \quad \sum Y = 0; Y_A - P - G = 0.$$

Вирішуючи перше рівняння, отримаємо

$$R_B = \frac{G \cdot 1,5 + P \cdot 5}{7} = \frac{30 \times 10^3 \times 1,5 + 50 \times 10^3 \times 5}{7} = 42,1 \times 10^3 \text{ Н} = 42,1 \text{ кН.}$$

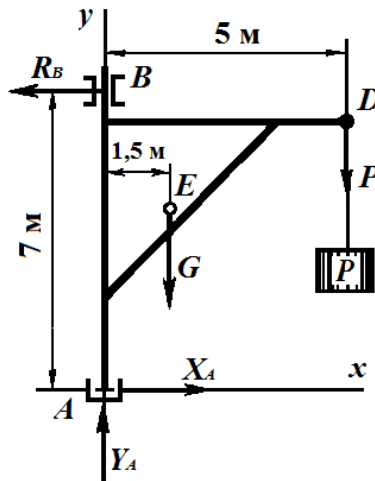


Рисунок 1.41

З другого рівняння отримаємо

$$X_A = R_B = 42,1 \text{ кН.}$$

З третього рівняння знаходимо

$$Y_A = P + G = 50 + 30 = 80 \text{ кН.}$$

1.6 Тертя

1.6.1 Поняття про тертя

Абсолютно гладких і абсолютно твердих тіл у природі не існує, і тому під час переміщення одного тіла по поверхні іншого виникає опір, який називається тертям. Тертя – явище опору відносному переміщенню, що виникає між двома тілами в зонах зіткнення поверхонь по дотичній до них.

Тертя – явище, що надзвичайно поширене в природі і таке, що має велике значення. На терті заснована робота ремінних і фрикційних передач, гальмівних пристроїв, прокатних станів, похилих транспортерів, фрикційних муфт і тому подібне. Тертя забезпечує зчеплення із землею і, отже, роботу автомобілів, тракторів і інших транспортних машин. За відсутності тертя людина не могла б ходити. Поряд із цим тертя у багатьох випадках є шкідливим опором, на подолання якого витрачається нерідко значна кількість енергії. Ці витрати енергії даремні і їх прагнуть зменшити.

Приводимо схему класифікації тертя за наявністю та характером руху (рис. 1.42).

Тертям спокою називається тертя двох тіл при попередньому зсуві, тобто за малого відносного переміщення тіл до переходу від спокою до відносного руху.

Тертям руху називається тертя двох тіл, що знаходяться у відносному русі.

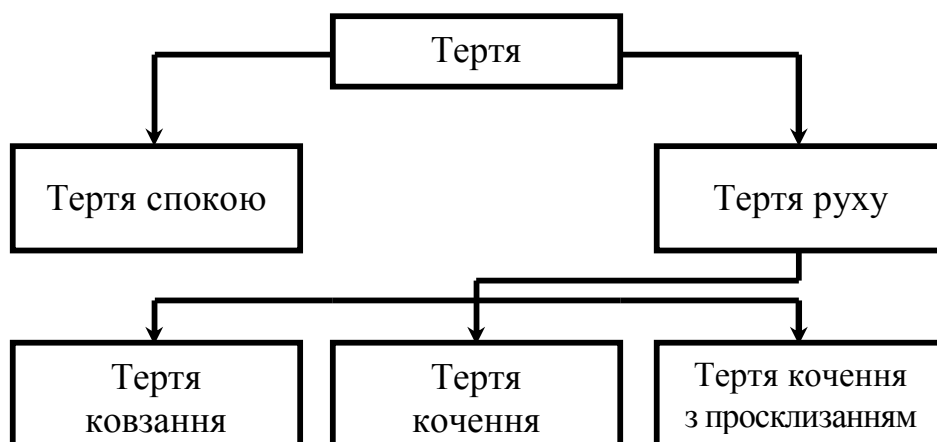


Рисунок 1.42

Далі розглянемо види тертя залежно від наявності і характеру відносного руху.

1.6.2 Тертя ковзання

Тертям ковзання називається тертя руху, за якого швидкості дотичних тіл у точках торкання різні. Тертя ковзання, як і тертя спокою, обумовлене насамперед шорсткістю і деформацією поверхонь, а також наявністю молекулярного зчеплення в притиснутих один до одного тіл. Тертя ковзання супроводжується зносом, тобто відділенням або залишковою деформацією матеріалу, а також нагрівом поверхонь тіл, що труться (залишковою називається деформація, що не зникає після припинення дії зовнішніх сил). Тертя характеризується силою тертя.

Сила тертя є сила опору відносному переміщенню двох тіл під час тертя.

Візьмемо тіло, що лежить на горизонтальній шорсткій площині (рис. 1.43). Сила тягара G врівноважується нормальною реакцією N . Якщо до тіла прикласти невелику рушійну силу P , то воно не прийде в рух, оскільки ця сила врівноважуватиметься силою тертя $F_{\text{тер}}$, яка є, фактично, реакцією опорної площини, направленої уздовж площини.

Якщо поступово збільшувати рушійну силу P , то до певного її значення тіло залишатиметься в спокої; за подальшого збільшення сили P тіло прийде в рух.

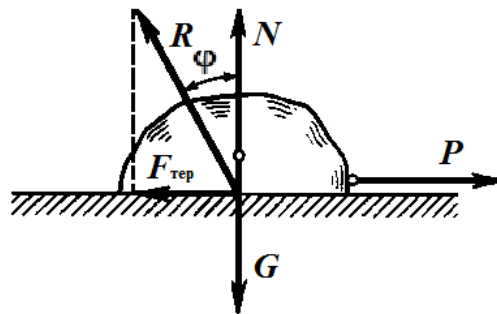


Рисунок 1.43

Звідси видно, що сила тертя в стані спокою залежно від міри попереднього зсуву може змінюватися від нуля до якогось максимального значення $F_{\text{тер}}^{\text{max}}$, а за модулем сила тертя $F_{\text{тер}}$ завжди дорівнює рушійній силі P (якщо P не більше $F_{\text{тер}}^{\text{max}}$).

Сила тертя до початку відносного руху називається неповною силою тертя.

Максимальне значення сила тертя спокою має у момент початку відносного руху і називається найбільшою силою тертя спокою або просто силою тертя спокою.

Сила тертя спокою завжди направлена у бік, протилежний до напрямку відносного руху тіла.

Французькі учені Амонтон, а потім Кулон провели серйозні дослідження у сфері області тертя і на їхній підставі сформулювали три *основні закони тертя ковзання*, зазвичай званих законами Кулона:

1. Сила тертя не залежить від величини площі поверхонь, що труться.

2. Максимальна сила тертя прямо пропорційна нормальній складовій зовнішніх сил, що діють на поверхні тіла.

3. Сила тертя залежить від матеріалу тіл, стану поверхонь, що труться, наявності та виду мастила.

Перший закон можна підтвердити такими міркуваннями. Якщо площа поверхонь, що труться, збільшиться, то збільшиться і кількість нерівностей, що зчіплюються, але зменшиться тиск (на одиницю площі), а опір відносному переміщенню залишиться тим самим.

Другий закон говорить про те, що якщо збільшиться нормальна складова зовнішніх сил, що діють на поверхні тіла (інакше кажучи, збільшиться сила нормального тиску або реакції), то в стільки саме разів зросте максимальна сила тертя.

Відношення сили тертя $F_{\text{тер}}$ до нормальної складової N зовнішніх сил, що діють на поверхні тіла, називається коефіцієнтом тертя ковзання, що позначається f (за неповної сили тертя спокою це відношення називається коефіцієнтом зчеплення).

Отже,

$$f = \frac{F_{\text{тер}}}{N} \text{ або } F_{\text{тер}} = fN. \quad (1.84)$$

У результаті другий закон тертя ковзання можна сформулювати так: сила тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання, помноженому на силу нормального тиску або реакції.

Очевидно, що коефіцієнт тертя ковзання – величина безрозмірна.

Нормальна реакція N опорної поверхні і сила тертя $F_{\text{тер}}$ дають рівнодійну R , яка називається повною реакцією опорної поверхні (рис. 1.43):

$$R = N + F_{\text{тер}}. \quad (1.85)$$

Повна реакція R складає з нормаллю до опорної поверхні якийсь кут. Максимальне значення цього кута (що буде у момент початку руху) називається кутом тертя і позначається ϕ . Із рисунка 1.43 витікає формула

$$F_{\text{тер}} = N \operatorname{tg} \phi. \quad (1.86)$$

Порівнюючи рівності (1.83) і (1.85), отримаємо

$$f = \operatorname{tg} \phi. \quad (1.87)$$

тобто коефіцієнт тертя ковзання дорівнює тангенсу кута тертя.

Якщо коефіцієнт тертя ковзання однаковий для всіх напрямків руху, то множина (геометричне місце) повних реакцій утворює круговий конус, який називається конусом тертя (рис. 1.44). Якщо для різних напрямків руху коефіцієнт тертя неоднаковий (наприклад, під час ковзання по дереву вздовж і поперек волокон), то конус тертя буде не круглим.

Властивість конуса тертя полягає в тому, що для рівноваги тіла, що лежить на шорсткій поверхні, рівнодійна прикладених до нього активних сил повинна проходити усередині конуса тертя.

Дійсно, якщо рівнодійну P активних сил, прикладених до тіла, розкласти на складові P_1 (рушійна сила) і P_2 (сила нормального тиску), то

$$P_1 = P_2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.88)$$

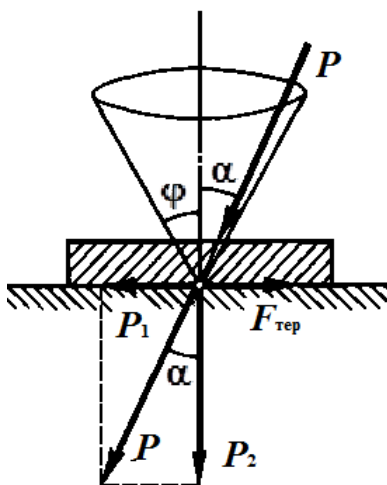


Рисунок 1.44

За другим законом тертя ковзання

$$F_{\text{тер}} = f P_2 = P_2 \operatorname{tg} \phi. \quad (1.89)$$

Отже, за $\alpha < \phi$ буде

$$P_1 < F_{\text{тер}} \quad (1.90)$$

і рух виявиться неможливим.

Згідно з третім законом, коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалів тіл, що труться, якості обробки поверхонь, виду і температури мастила.

Залежно від наявності між сполучуваними поверхнями шару мастила тертя підрозділяється на два види: тертя без змащувального матеріалу і тертя в умовах мастила.

Коефіцієнт тертя ковзання визначають дослідним шляхом: значення його для різних умов наведені в довідниках.

Наведемо орієнтовні значення коефіцієнтів f тертя ковзання (під час спокої):

- метал по металу без мастила – 0,15–0,3;
- метал по металу з мастилом – 0,1–0,18;
- дерево по дереву без мастила – 0,4–0,6;
- шкіра по чавуну без мастила – 0,3–0,5;
- шкіра по чавуну з мастилом – 0,15;
- сталь по льоду – 0,02.

Коефіцієнт тертя ковзання під час руху зазвичай менше, ніж під час спокою, і в першому наближенні не залежить від швидкості відносного переміщення тіл.

Методи розв'язання задач статички за наявності тертя залишаються такими саме, як і за відсутності його, крім того у рівняння рівноваги зазвичай вводять максимальні значення сил тертя.

Приклад 1.10. Діаметр шайби гальма колодки $D = 500$ мм нафтогазового обладнання, діаметр барабана $d = 100$ мм, сила $P = 200$ Н, вантаж $G = 1\,500$ Н, коефіцієнт тертя $f = 0,4$ (рис. 1.45). Визначити відношення розмірів a/b , за якого припиниться рух. Кут ACO прямий.

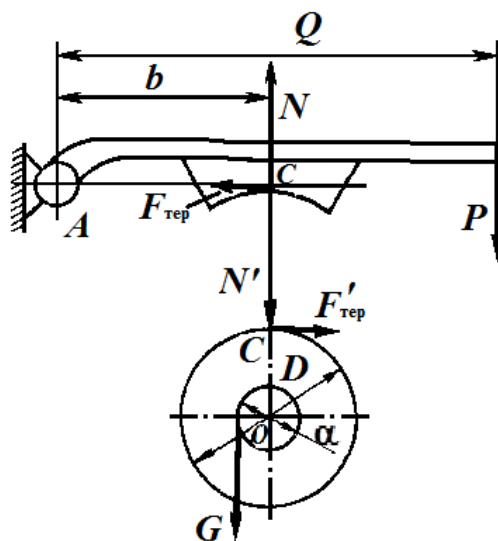


Рисунок 1.45

Розв'язання. У мить, коли рух припиниться, подумки розділимо цю систему тіл на дві частини і розглянемо спочатку рівновагу барабана з шайбою, а потім рівновагу важеля з колодкою (рис. 1.46). Згідно з аксіомою взаємодії, нормальна реакція $N = N'$, а сила тертя $F_{\text{тер}} = F'_{\text{тер}}$. На підставі другого закону тертя ковзання рівнодійна сил тертя колодки об шайбу рівна

$$F_{\text{тер}} = fN.$$

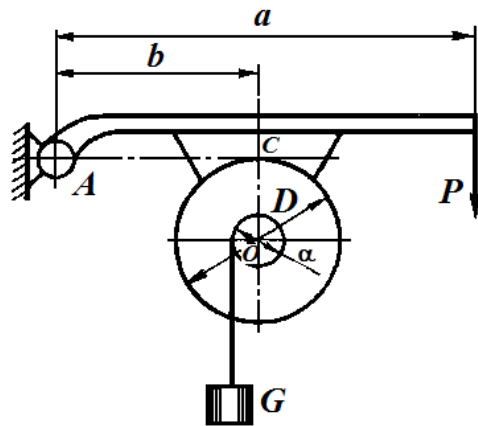


Рисунок 1.46

До обох частин системи застосуємо умову рівноваги і складемо два рівняння рівноваги:

– для шайби

$$\sum M_0 = 0, \frac{-F'_{\text{тер}} D}{2} + \frac{Gd}{2} = 0;$$

– для важеля

$$\sum M_A = 0, -Pa + Nb = 0.$$

Вирішимо отриману систему трьох рівнянь. З перших двох рівнянь знайдемо N :

$$F'_{\text{тер}} = \frac{Gd}{D} = fN,$$

звідки

$$N = \frac{Gd}{fD}.$$

Отриманий вираз підставимо в третє рівняння:

$$Pa = Nb = \frac{Gd}{fD} b.$$

Звідси визначимо відношення

$$\frac{a}{b} = \frac{Gd}{fDP} = \frac{1500 \times 0,1}{0,4 \times 0,5 \times 200} = 3,75.$$

Отриманий результат мінімальний. Очевидно, що руху не буде за $a/b \geq 3,75$.

1.6.3 Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло, що лежить на шорсткій похилій площині, яка складає кут α з горизонтальною площиною (рис. 1.47).

Розкладемо силу G на складові G_1 і G_2 , паралельну і перпендикулярну похилій площині. Модулі цих складових визначимо за такими формулами:

$$G_1 = G \sin \alpha, \quad G_2 = G \cos \alpha. \quad (1.91)$$

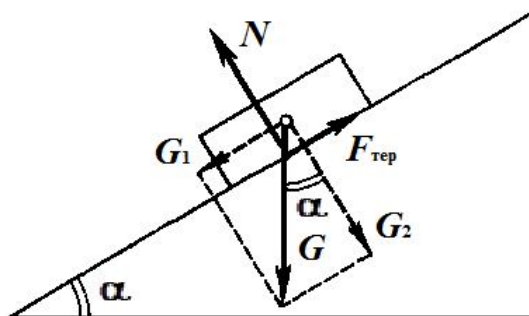


Рисунок 1.47

Складова G_2 урівноважується реакцією N похилої площини. Отже,

$$G_2 = N = G \cos \alpha. \quad (1.92)$$

Складова G_1 прагне зрушити тіло вздовж похилої площини. Повністю або частково ця складова врівноважується силою тертя; згідно з другим законом тертя ковзання, її максимальне значення дорівнює

$$F_{\text{тер}} = fN = fG \cos \alpha,$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання тіла по похилій площині.

Для того щоб тіло, що лежить на похилій площині, знаходилося в рівновазі, рушійна сила G_1 має за модулем дорівнювати силі тертя $F_{\text{тер}}$, тобто

$$G \sin \alpha = fG \cos \alpha \quad \text{або} \quad \tan \alpha = f = \tan \varphi, \quad (1.93)$$

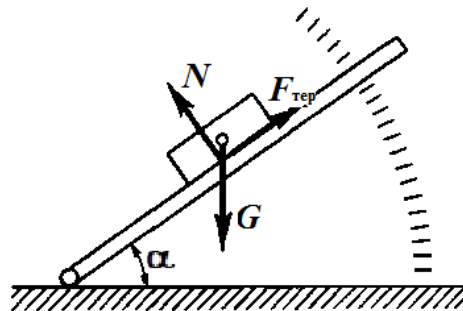
звідки $\alpha = \varphi$.

Якщо кут, який площина похилої складає з горизонтом, дорівнює куту тертя, то тіло, що лежить на похилій площині, буде під дією власної сили тяжіння або рівномірно ковзати вниз, або знаходитися у спокої.

Для того, щоб тіло, лежаче на похилій площині, свідомо не ковзало вниз під дією власної сили тяжіння, має бути дотримана умова $\alpha < \varphi$.

Похилою площиною із змінним кутом нахилу до горизонту користуються для експериментального визначення кута тертя φ і коефіцієнта тертя f (рис. 1.48).

Визначимо модуль сили P , паралельній похилій площині, у разі рівномірного переміщення тіла вгору по шорсткій похилій площині (рис. 1.49).



За умови $\alpha = \varphi$ $f = \operatorname{tg} \alpha$

Рисунок 1.48

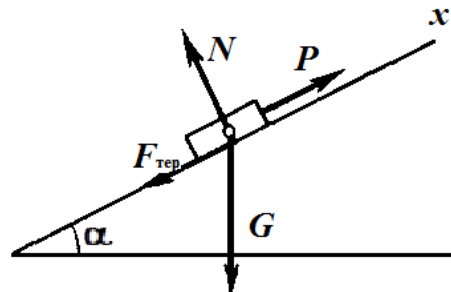


Рисунок 1.49

Спроекуємо сили, що діють на тіло, на вісь x . Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; \quad P - G \sin \alpha - F_{\text{тер}} = 0. \quad (1.94)$$

Оскільки

$$F_{\text{тер}} = f G \cos \alpha, \quad (1.95)$$

тоді

$$P = G \sin \alpha + f G \cos \alpha. \quad (1.96)$$

Визначимо модуль горизонтальної сили P , яку потрібно прикласти до тіла для рівномірного переміщення його вгору по шорсткій похилій площині (рис. 1.50).

Застосуємо геометричну умову рівноваги плоскої системи сил (розмірами тіла нехтуємо), що сходяться, і побудуємо замкнутий силовий багатокутник, відповідний рівнянню рівноваги

$$G + P + N + F_{\text{тер}} = 0. \quad (1.97)$$

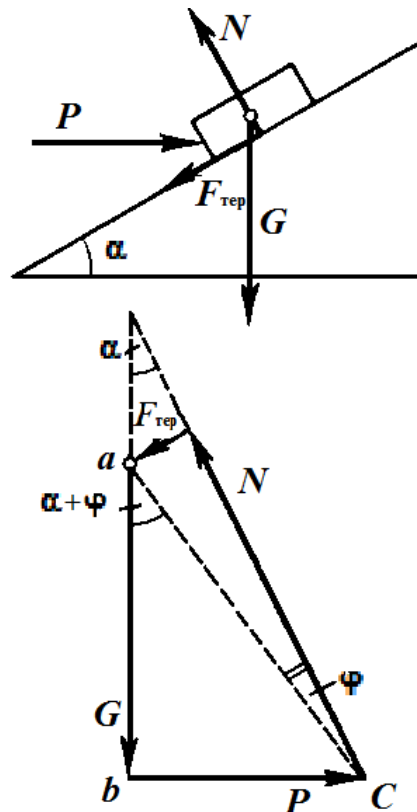


Рисунок 1.50

З трикутника abc маємо

$$P = G \tan(\alpha + \varphi). \quad (1.98)$$

Цей випадок руху наявний за взаємного переміщення гвинта і гайки з прямокутним різьбленням, оскільки різьблення гвинта можна розглядати як похилу площину, кут нахилу якої дорівнює куту підйому гвинтової лінії.

Тертя в різьбленні, що має трикутний або трапецоїдний профіль, подібно до тертя в клинчастому повзунові. Тому розглянемо клинчастий повзун з кутом загострення 2β , навантажений вертикальною силою Q (рис. 1.51). Визначимо силу P , необхідну для рівномірного переміщення повзуна уздовж горизонтальних напрямних, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f .

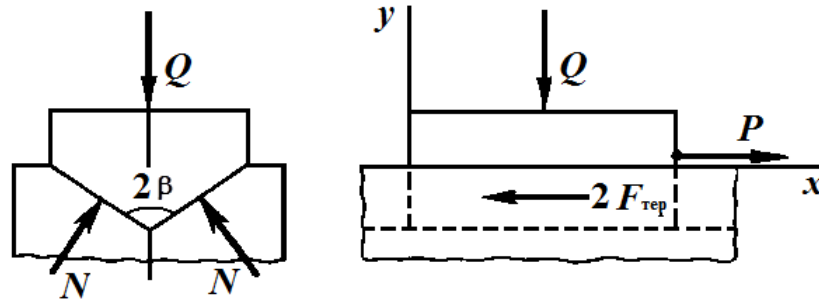


Рисунок 1.51

Складемо два рівняння рівноваги повзуна:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; & P - 2F_{\text{тер}}; \\ \sum Y &= 0; & 2N \sin \beta - Q = 0,\end{aligned}\tag{1.99}$$

де $F_{\text{тер}}$ – сила тертя на кожній грані повзуна;

N – нормальна реакція напрямної.

Вирішуючи цю систему рівнянь і враховуючи, що $F_{\text{тер}} = fN$, отримаємо

$$P = \frac{f}{\sin \beta} Q = f' Q,\tag{1.100}$$

де $f' = \frac{f}{\sin \beta}$ – приведений коефіцієнт тертя.

Відповідний цьому приведенному коефіцієнту кут тертя позначимо φ' і назовемо приведеним кутом тертя, тоді

$$f' = \operatorname{tg} \varphi' .\tag{1.101}$$

Очевидно, що $f' > f$, отже, за інших рівних умов тертя в клинчастому повзуні більше тертя на площині.

Поняття приведенного коефіцієнта тертя умовне, оскільки він змінюється залежно від кута загострення клинчастого повзуна.

За аналогією з рухом тіла вгору по похилій площині під дією горизонтальної сили для рівномірного переміщення клинчастого повзуна по напрямних, нахилених до горизонту під кутом α , потрібно прикласти горизонтальну силу, що дорівнює

$$P = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varphi') .\tag{1.102}$$

Тертя в кріпильному метричному різьбленні подібно до тертя клинчастого повзуна з кутом загострення $2\beta = 120^\circ$, для трапецоїдного різьблення кут $2\beta = 150^\circ$.

1.6.4 Тертя кочення

Тертям кочення називається тертя руху, за якого швидкості дотичних тіл у точках торкання однакові за величиною і напрямком.

Якщо рух двох дотичних тіл відбувається за одночасного кочення і ковзання, то в цьому випадку виникає тертя кочення з прослизанням.

Розглянемо кочення без ковзання циліндра вагою G і радіусом r по горизонтальній опорній площині (рис. 1.52). Під тиском сили G станеться деформація циліндра й опорної площини в місці їхнього зіткнення. Якщо сила P не діє, то сила G врівноважуватиметься реакцією R опорної площини і циліндр знаходитиметься у спокої (реакція R буде вертикальна).

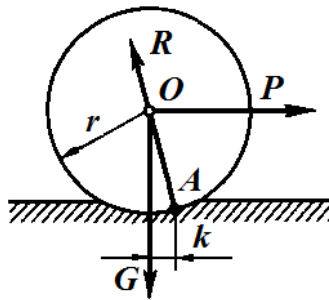


Рисунок 1.52

Якщо до циліндра прикласти невелику силу P , то він як і раніше знаходитиметься у спокої. При цьому станеться перерозподіл тиску на опорну поверхню і повна реакція R пройде через якусь точку A і через точку O (згідно з теоремою про рівновагу трьох непаралельних сил).

За будь-якого критичного значення сили P циліндр прийде в рух і рівномірно перекочуватиметься по опорній площині, а точка A займе крайнє праве положення. Звідси видно, що тертя кочення в стані спокою може змінюватися від нуля до якогось максимального значення, до того ж максимальним воно буде у момент початку руху.

Позначимо k максимальне значення плеча сили G відносно точки A . Тоді в разі рівномірного перекочування циліндра (тобто рівноваги)

$$\sum M_A = 0 \quad (1.103)$$

або

$$-Pr + Gk = 0, \quad (1.104)$$

а плече сили P унаслідок незначності деформацій тіл вважаємо рівним радіусу r циліндра (сила P – горизонтальна). З останньої рівності визначимо силу, необхідну для рівномірного кочення циліндра:

$$P = \frac{kG}{r}. \quad (1.105)$$

Максимальне значення плеча k називається коефіцієнтом тертя кочення; він має розмірність довжини і виражається в сантиметрах або міліметрах.

З отриманої формули видно, що зусилля, необхідне для перекошування катка, прямо пропорційне його вазі й обернено пропорційно до радіуса катка.

Коефіцієнт тертя кочення визначається дослідним шляхом, його значення для різних умов наводяться в довідниках.

Наведемо орієнтовні значення коефіцієнтів k тертя кочення для катка по площині (см):

- м'яка сталь по м'якій сталі – 0,005;
- загартована сталь по загартованій сталі – 0,001;
- чавун по чавуну – 0,005;
- дерево по сталі – 0,03–0,04;
- дерево по дереву – 0,05–0,08;
- гумова шина по шосе – 0,24.

Коефіцієнт тертя кочення практично не залежить від швидкості руху тіла.

У низці випадків під час вивчення тертя кочення активні та реактивні сили, що діють на каток, зручно уявляти собі в іншому вигляді (рис. 1.53, а, б).

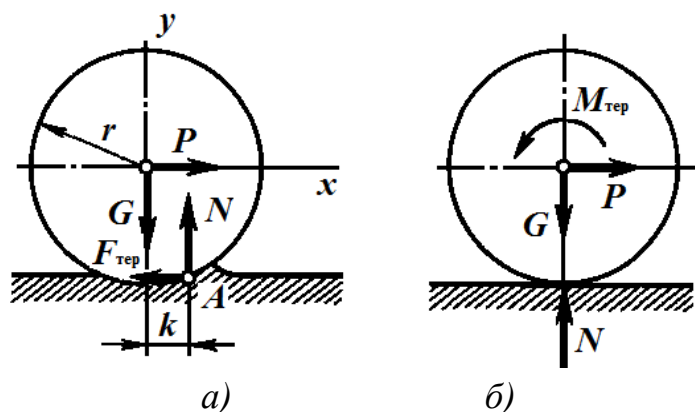


Рисунок 1.53

Розкладемо повну реакцію R опорної поверхні на складові N і $F_{\text{тер}}$, тоді

$$R = N + F_{\text{тер}}, \quad (1.106)$$

де $F_{\text{тер}}$ – сила тертя кочення;

N – реакція, нормальна до недеформованої опорної площини.

Складемо три рівняння рівноваги катка:

$$\sum X = 0; \quad P - F_{\text{тер}} = 0, \quad (1.107)$$

$$\sum Y = 0; \quad N - G = 0, \quad (1.108)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -Pr + Gk = 0. \quad (1.109)$$

З цих рівнянь маємо

$$P = F_{\text{тер}}, \quad N = G, \quad Pr = Gk. \quad (1.110)$$

Введемо позначення $Pr = M$, $Gk = M_{\text{тер}}$ і назвемо M – момент кочення, $M_{\text{тер}}$ – момент тертя.

Можливі такі окремі випадки руху катка:

- а) $M \geq M_{\text{тер}}$, але $P < F_{\text{тер}}$ – лише кочення;
- б) $M < M_{\text{тер}}$, але $P > F_{\text{тер}}$ – лише ковзання;
- в) $M > M_{\text{тер}}$, але $P > F_{\text{тер}}$ – кочення з прослизанням;
- г) $M < M_{\text{тер}}$, але $P < F_{\text{тер}}$ – стан спокою.

Тертя кочення в більшості випадків менше тертя ковзання, тому замість підшипників ковзання широко застосовують кулькові і роликові підшипники кочення.

На практиці нерідкі випадки поєднання тертя ковзання з тертям кочення, наприклад у зубчастих передачах.

1.6.5 Стійкість проти перекидання

Розглянемо тверде тіло вагою G , що спирається на площину і здатне перевертатися довкола якогось ребра під дією горизонтальної сили P (рис. 1.54). Допустимо, що сили P і G лежать в одній площині, що перетинається з ребром у точці A . У момент початку перекидання на тіло діятимуть також нормальна реакція N_A і сила тертя $F_{\text{тер}}$, прикладені в точці A , а в разі рівноваги системи всіх чотирьох сил можна записати два рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0; \quad N_A - G = 0, \quad \text{звідки } N_A = G; \quad (1.111)$$

$$\sum X = 0; \quad F_{\text{тер}} - P = 0, \quad \text{звідки } P = F_{\text{тер}}. \quad (1.112)$$

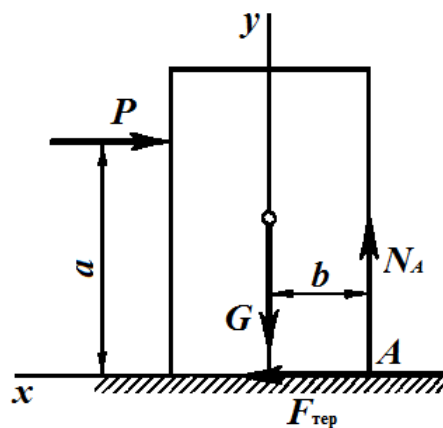


Рисунок 1.54

Отже, у момент початку перекидання на це тіло діють пара сил $(P, F_{\text{тер}})$, що прагне перевернути тіло, і пара сил $(G, F_{\text{тер}})$, що протидіє опорі.

Очевидно, що перекидання не станеться, якщо

$$M(G, N_A) > M(P, F_{\text{тер}}) \text{ або } Gb > Pa. \quad (1.113)$$

Добуток Gb дорівнює моменту сили G відносно точки A і називається моментом стійкості. Момент сили P відносно тієї саме точки, що дорівнює опору Pa , називається перекидним моментом.

Умова стійкості проти перекидання запишеться у вигляді нерівності

$$M_{\text{ст}} > M_{\text{пер}} \quad (1.114)$$

і формулюється так: для стійкості твердого тіла проти перекидання необхідно і досить, щоб момент стійкості був більше перекидного моменту.

Якщо на тіло діють декілька сил, що прагнуть його перевернути, то перекидний момент дорівнює сумі моментів цих сил відносно точки, довкола якої може статися перекидання. Те саме стосується і моменту стійкості.

Відношення моменту стійкості до перекидного моменту називається коефіцієнтом стійкості:

$$\frac{M_{\text{ст}}}{M_{\text{пер}}} = k_{\text{ст}}. \quad (1.115)$$

Очевидно, що в конструкціях має бути $k_{\text{ст}} > 1$.

1.7 Просторова система сил

1.7.1 Просторова система сил, що сходяться

Система сил, лінії дії яких розташовані в різних площях, називається просторовою системою сил.

Просторова система сил називається такою, що сходиться, якщо лінії дії всіх сил системи перетинаються в одній точці.

Теорема. Просторова система сил, що сходяться, еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодійної проходить через точку перетину ліній дії складових сил.

Нехай дано просторову систему n сил, що сходяться $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n)$. На підставі висновку з аксіом III і IV перенесемо всі сили системи уздовж ліній

дії в точку їхнього перетину. Потім на підставі аксіоми паралелограма складемо сили F_1 і F_2 , унаслідок чого отримаємо їхню рівнодійну:

$$F_{\Sigma 1} = F_1 + F_2. \quad (1.116)$$

Склавши цю рівнодійну з силою F_3 , отримаємо рівнодійну трьох сил:

$$F_{\Sigma 2} = F_{\Sigma 1} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3. \quad (1.117)$$

Повторивши вказану операцію $n - 1$ разів, отримаємо рівнодійну системи n сил, яка дорівнюватиме векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодійною проходить через точку перетину ліній дії складових:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n \text{ або } F_{\Sigma} = \sum F_i. \quad (1.118)$$

Силовий багатокутник просторової системи сил не лежить в одній площині, тому геометричний і графічний способи знаходження рівнодійної неприйнятні, а застосовується аналітичний спосіб (метод проекцій).

1.7.2 Проекція сили на вісь у просторі

Якщо сила і вісь не лежать в одній площині, то перпендикуляри, що проектують, також не лежать в одній площині (рис. 1.55).

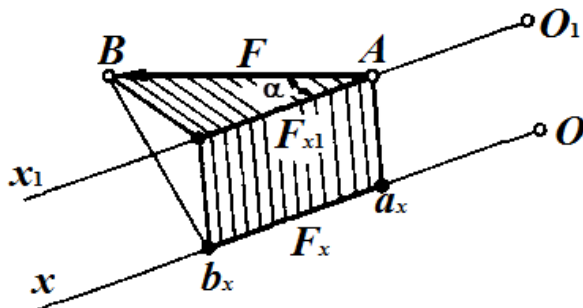


Рисунок 1.55

Для того щоб визначити, чому дорівнює проекція сили F на вісь Ox , потрібно подумки провести через початок або кінець сили вісь O_1x_1 , паралельну цієї осі Ox , тоді $F_x = F \cos \alpha$, оскільки $F_x = F_{x1}$.

Правило знаків для проекцій залишається тим самим.

Якщо вектор сили паралельний осі, то він проектується на цю вісь у натуральну величину.

Якщо вектор сили лежить у площині, перпендикулярній осі, то його проекція на цю вісь дорівнює нулю.

1.7.3 Розкладання сили по трьох осях координат

Нехай дано силу F (рис. 1.56). Візьмемо систему координат так, щоб початок координат збігався з початком вектора сили F . Із кінця цього вектора опустимо перпендикуляр на площину xy і розкладемо силу F на складові F_{xy} і F_z , а складову F_{xy} – на складові F_x і F_y . Тоді

$$F = F_x + F_y + F_z. \quad (1.119)$$

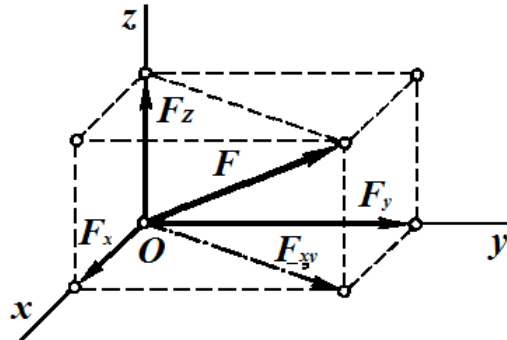


Рисунок 1.56

Добудуємо отримане зображення до паралелепіпеда, у якого складові F_x , F_y , F_z є ребрами, а сила F – діагоналлю.

З викладеного можна зробити такий висновок: рівнодійна трьох взаємно перпендикулярних сил виражається за модулем і напрямком діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах.

Із рисунка 1.56 видно, що у випадках розкладання сили F по трьох взаємно перпендикулярних напрямках x , y , z складові F_x , F_y , F_z дорівнюють за модулем проекціям сили F на ці осі. Ці проекції позначимо F_x , F_y , F_z .

Знаючи проекції сили на три взаємно перпендикулярні осі координат, можна визначити модуль і напрямок вектора сили за формулами:

– модуль сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad (1.120)$$

– напрямні косинуси

$$\cos(F, x) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(F, y) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(F, z) = \frac{F_z}{F}. \quad (1.121)$$

1.7.4 Аналітичний спосіб визначення рівнодійної просторової системи сил, що сходяться

Дано просторову систему n сил, що сходяться. Помістимо початок координат у точці перетину ліній їхньої дії і розкладемо кожну силу цієї системи на три взаємно перпендикулярні складові, направлені по осях координат, заздалегідь перенісши всі сили вздовж ліній їхньої дії в одну точку.

Замість цієї системи n сил, що сходяться, отримаємо еквівалентну їй систему $3n$ сил, з яких n сил діють по осі x , n сил – по осі y і n сил – по осі z .

Рівнодійна сил, направлених по осі x , дорівнює їхній алгебраїчній сумі; те саме можна сказати про сили, направлені по осях y і z . Отже, систему $3n$ сил замінюємо еквівалентною їй системою трьох сил.

Проекції сили на три взаємно перпендикулярні осі та складові сили, направлені по цих осях, рівні за модулем, отже, проекції рівнодійної дорівнюють

$$F_{\Sigma x} = \sum X. \quad F_{\Sigma y} = \sum Y. \quad F_{\Sigma z} = \sum Z. \quad (1.122)$$

Рівнодійна трьох взаємно перпендикулярних сил виражається за модулем і напрямком діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах, і за відомими проекціями рівнодійної можна визначити модуль і напрямок вектора рівнодійної.

1.7.5 Аналітичні умови рівноваги просторової системи сил, що сходяться

Відомо, що просторова система сил, що сходяться, еквівалентна рівнодійній. Якщо така система знаходиться в рівновазі, тобто еквівалентна нулю, то рівнодійна цієї системи дорівнює нулю, а отже, і проекції рівнодійної дорівнюють нулю, крім того ці проекції дорівнюють сумі проекцій складових.

Звідси витікають умови рівноваги просторової системи сил, що сходяться:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0. \quad (1.123)$$

Ці умови формулюються у такий спосіб: для рівноваги просторової системи сил, що сходяться, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювала нулю.

Приклад 1.11. Вантаж $G = 200$ Н стримується в рівновазі горизонтальною мотузкою AO і двома мотузками BO і CO , площина яких нахилена до горизонтальної площини під кутом $\alpha = 45^\circ$ і утворює з вертикальною площиною, що проходить через AO , прямий кут (рис. 1.57, а).

Мотузки BO і CO утворюють з цією вертикальною площиною кути $\beta = 30^\circ$. Визначити натягнення мотузок.

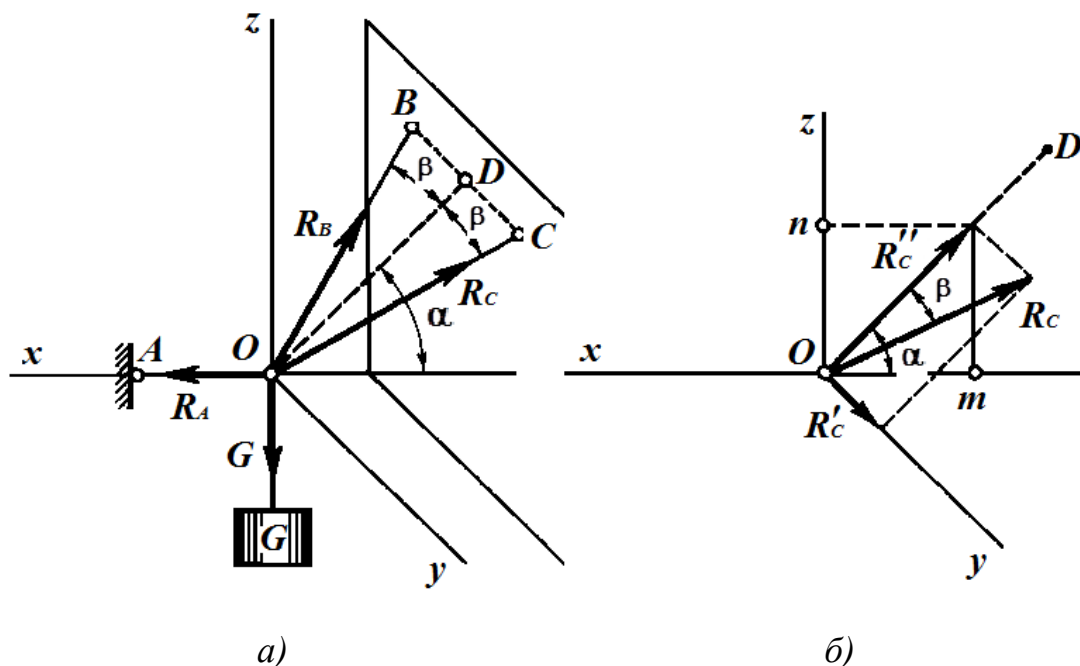


Рисунок 1.57

Розв'язок. Розглянемо рівновагу вузла O , до якого прикладені чотири сили: G , R_A , R_B , R_C . До просторової системи чотирьох сил, що сходяться, застосуємо аналітичні умови рівноваги і складемо три рівняння рівноваги:

$$1. \sum Y = 0; R_C \sin \beta - R_B \sin \beta = 0, \text{ звідки } R_C = R_B.$$

Оскільки кути між реакціями R_B , R_C і осями координат x і z невідомі, то для зручності проектування кожену з цих сил розкладемо на дві складові, як показано на рисунку 1.58, б. Тоді

$$R_{C_x} = Om = R''_C \cos \alpha = R_C \cos \beta \cos \alpha;$$

$$R_{C_z} = On = R''_C \sin \alpha = R_C \cos \beta \sin \alpha.$$

Проекції складової R'_C на осі x і z дорівнюють нулю, оскільки ця складова перпендикулярна вказаним осям;

2. $\sum Z = 0; R_C \cos \beta \sin \alpha + R_B \cos \beta \sin \alpha - G = 0$. Враховуючи, що $R_B = R_C$, отримуємо

$$R_B = R_C = \frac{G}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{G}{2 \cos 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{200}{2 \times 0,866 \times 0,707} = 163 \text{ Н.}$$

$$3. \sum X = 0; \quad R_A - R_C \cos \beta \cos \alpha - R_B \cos \beta \cos \alpha = 0, \text{ звідки}$$

$$R_A = 2R_B \cos \beta \cos \alpha = \frac{2G \cos \beta \cos \alpha}{2 \cos \beta \sin \alpha} = G = 200 \text{ Н.}$$

1.7.6 Момент сили відносно осі

Розглянемо колесо черв'ячної передачі, укріплене на валу, що обертається в підшипниках (рис. 1.58). Черв'як передає черв'ячному колесу зусилля F , яке не лежить у перпендикулярній осі площині.

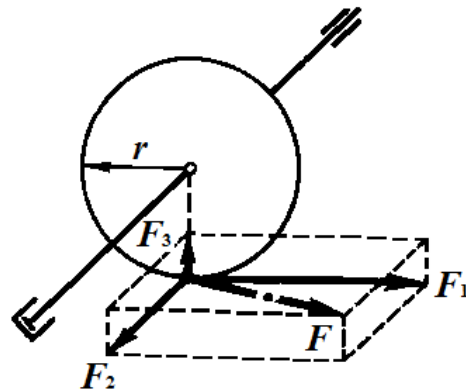


Рисунок 1.58

Розкладемо силу F на три взаємно перпендикулярні складові F_1 , F_2 і F_3 . Складову F_1 назовемо окружним зусиллям, складову F_2 – осьовим зусиллям, а складову F_3 – радіальним зусиллям.

Складова F_1 викликає обертальну дію, яка вимірюється добутком $F_1 r$; складова F_2 прагне зрушити колесо уздовж осі, складова F_3 прагне зігнути вісь колеса, а обертальна дія цих сил відносно осі дорівнює нулю.

Отже, якщо потрібно знайти момент сили відносно осі, то потрібно приймати в розрахунок лише F_1 , яке лежить у перпендикулярній осі площині, та не є такою, що перетинає вісь.

Раніше було встановлено, що проекція вектора сили на вісь є скалярна алгебраїчна величина. На відміну від проекції на вісь проекція сили на площину є величина векторна, оскільки ця проекція характеризується не лише числовим значенням, але і положенням на площині, тобто напрямком. Тому моменту сили відносно осі можна дати таке визначення: моментом сили відносно осі називається величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Це визначення пояснює рисунок 1.59. Момент сили відносно осі умовимося записувати так:

$$M_z(F) = F_H a. \quad (1.124)$$

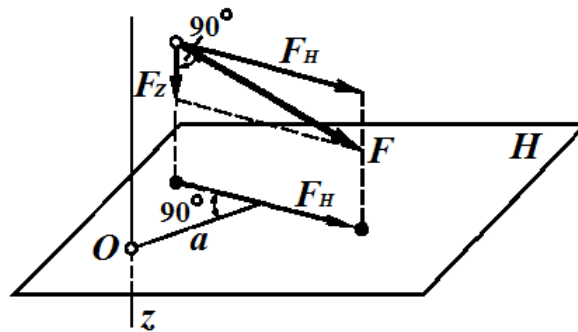


Рисунок 1.59

Умовимося вважати момент сили позитивним, якщо дивитися з позитивного кінця осі, де сила прагне викликати обертання проти годинникової стрілки, і навпаки.

Момент сили відносно осі не змінюється від переміщення сили уздовж лінії її дії.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках (не рахуючи випадків, коли сила дорівнює нулю або діє уздовж осі):

- якщо вектор сили паралельний осі, оскільки при цьому проекція сили на площину, перпендикулярну осі, дорівнює нулю (сила F_z на рис. 1.59);
- якщо лінія дії сили пересікає вісь, оскільки при цьому плече дорівнює нулю (сила F_3 на рис. 1.59).

1.7.7 Аналітичні умови рівноваги просторової системи довільно розташованих сил

Для рівноваги просторової системи довільно розташованих сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на кожну з трьох осей координат дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно кожної з цих осей дорівнювала нулю.

Запишемо умови рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad \sum M_x(F_i) = 0, \\ \sum Y &= 0; \quad \sum M_y(F_i) = 0, \\ \sum Z &= 0; \quad \sum M_z(F_i) = 0. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Пояснимо сенс цих умов, для чого застосуємо три умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M(F_i) = 0. \quad (1.126)$$

Тіло, що лежить на площині, має три міри свободи, а саме: можливість переміщення в напрямках двох взаємно перпендикулярних осей, що лежить у цій площині, і можливість обертання довкола осі, перпендикулярної цій площині. Якщо до тіла прикладена плоска система сил і виконана умова $\sum X = 0$, то тіло не переміщатиметься у напрямку осі x , оскільки рівнодійна системи не має складової, паралельній осі x . Якщо виконана умова $\sum Y = 0$, то тіло не переміщатиметься і у напрямку осі y , оскільки рівнодійна системи не має складової, паралельній осі y . Нарешті, якщо виконана умова $\sum M(F_i) = 0$, тобто сума моментів відносно будь-якої точки площини дорівнює нулю, то тіло під дією цієї системи сил не обертатиметься, оскільки немає пари сил, яка може здійснити це обертання.

Таким чином, трьом мірам свободи тіла на площині відповідають три умови рівноваги.

Вільне тіло в просторі має шість мір свободи, а саме: можливість переміщатися в напрямках трьох взаємно перпендикулярних осей координат і можливість обертатися довкола цих осей. Отже, шести мірам свободи тіла в просторі відповідають шість умов рівноваги.

Якщо система сил, прикладена до вільного тіла, задовольняє всім шести умовам рівноваги, то можливість трьох переміщень і трьох обертань під дією цієї системи унеможливлено, і тіло знаходитиметься в рівновазі.

Неважко показати, що всі виведені вище умови рівноваги для різних систем сил є окремими випадками умов рівноваги, розглянутих тут.

У випадку якщо на вільне тіло діє просторова система паралельних сил (наприклад, паралельних осі z), то умови рівноваги цієї системи запишуться так:

$$\sum Z = 0, \quad \sum M_x(F_i) = 0, \quad \sum M_y(F_i) = 0. \quad (1.127)$$

Останні три умови рівноваги будуть тотожністю, оскільки проекції всіх сил такої системи на осі x і y дорівнюють нулю і моменти всіх сил відносно осі z також дорівнюють нулю.

Оскільки умови рівноваги просторової системи сил справедливі для будь-яких прямокутних осей координат, то під час розв'язання даної задачі систему координат можна змінювати, тобто частину умов рівноваги скласти для одних осей координат, а частину – для змінених.

Крім того, можна одне, два або всі три рівняння проекцій сил замінити рівняннями моментів сил відносно нових осей координат. У деяких випадках такі прийоми спрощують розв'язання задач.

Під час розв'язання задач рівняння моментів сил відносно осей в загальному вигляді записуватимемо спрощено, а саме:

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \quad (1.128)$$

Приклад 1.12. На горизонтальному валу AB (рис. 1.61) насаджені зубчасте колесо 1 діаметром $D = 2$ м і шестерня 2 діаметром $d = 20$ см. Інші розміри вказані на рисунку 1.60. До колеса 1 по дотичній прикладена горизонтальна сила $P = 100$ Н, а до шестерні 2 також по дотичній прикладена вертикальна сила Q . Визначити силу Q і реакції підшипників A і B у стані рівноваги. Масою деталей нехтувати.

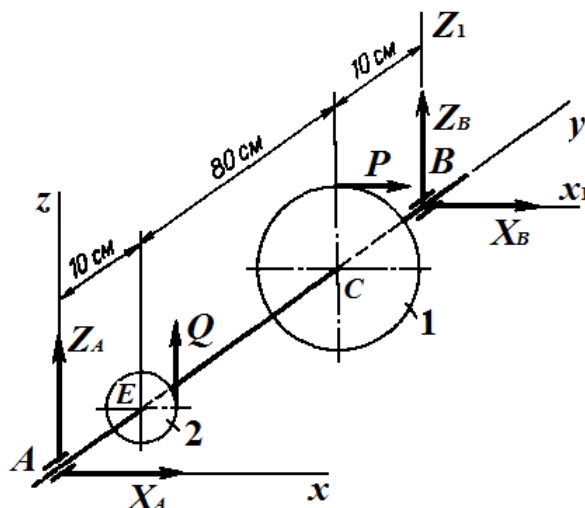


Рисунок 1.60

Розв'язок. Відкинемо підшипники і розглянемо рівновагу валу із зубчастим колесом і шестернею. Реакції підшипників A і B перпендикулярні осі валу. Тому розкладемо кожен з цих реакцій на дві взаємно перпендикулярні складові, паралельні осям координат x і z . У результаті отримана прикладена до заданої системи тіл просторова система шести сил, п'ять із яких, тобто X_A, Z_A, X_B, Z_B, Q , невідомі за модулем.

Застосуємо умови рівноваги просторової системи довільно розташованих сил і складемо п'ять рівнянь рівноваги:

1. Перше рівняння

$$\sum M_y = 0; \quad \frac{-d}{2} + \frac{PD}{2} = 0.$$

Із цього рівняння

$$Q = \frac{PD}{d} = \frac{100 \times 2}{0,2} = 1\,000 \text{ Н} = 1 \text{ кН};$$

2. Друге рівняння

$$\sum M_z = 0; \quad -X_B \cdot AB - P \cdot AC = 0.$$

Із цього рівняння

$$X_B = \frac{-P \cdot AC}{AB} = \frac{-100 \times 0,9}{1,0} = -90 \text{ Н};$$

3. Третє рівняння

$$\sum M_x = 0; \quad Q \cdot AE + Z_B \cdot AB = 0.$$

Із цього рівняння

$$Z_B = \frac{-Q \cdot AE}{AB} = \frac{-1\,000 \times 0,1}{1,0} = -100 \text{ Н};$$

4. Четверте рівняння

$$\sum X = 0; \quad X_A + P + X_B = 0.$$

Із цього рівняння

$$X_A = -P - X_B = -100 - (-90) = -10 \text{ Н};$$

5. П'яте рівняння

$$\sum Z = 0; \quad Z_A + Q + Z_B = 0.$$

Із цього рівняння

$$Z_A = -Q - Z_B = -1\,000 - (-100) = -900 \text{ Н}.$$

Знак «-» перед значеннями реакцій X_A , X_B , Z_A і Z_B показує, що ці реакції направлені протилежно вказаним на рисунку 1.60.

Шоста умова рівноваги $\sum Y = 0$ обертається в тотожність, оскільки проекції на вісь y всіх сил цієї системи дорівнюють нулю.

Для перевірки рішення складемо додаткове, контрольне рівняння моментів відносно осі x_1 , що проходить через точку B :

$$\sum M_{x_1} = 0; \quad -Z_A \cdot AB - Q \cdot BE = 0.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$900 \times 1,0 - 1\,000 \times 0,9 = 0.$$

Контрольне рівняння обертається в тотожність, що свідчить про правильність отриманих відповідей.

На цьому прикладі покажемо можливість зміни під час розв'язання системи координатних осей і заміни рівняння проекцій рівнянням моментів.

Визначимо реакцію X_A , залишивши замість рівняння проекцій сил на вісь x ; рівняння моментів сил відносно нової осі z_1 , що проходить через точку B :

$$\sum M_{z_1} = 0; \quad X_A \cdot AB + P \cdot CB = 0.$$

Із цього рівняння

$$X_A = \frac{-P \cdot CB}{AB} = \frac{-100 \times 0,1}{1,0} = -10 \text{ Н.}$$

Як видно, відповідь отримана та саме.

1.7.8 Теорема про момент рівнодійної відносно осі (теорема Варіньона)

Теорема. Момент рівнодійної відносно осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї саме осі.

Нехай надані просторова система n довільно розташованих сил, прикладених до тіла, і рівнодійна цієї системи F_Σ (рис. 1.61):

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \equiv F_\Sigma. \quad (1.129)$$

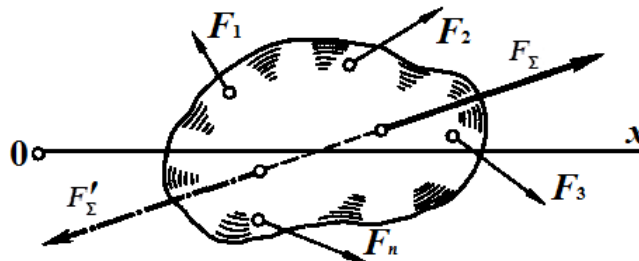


Рисунок 1.61

Прикладемо до тіла іншу систему сил, рівнодійна якій F'_Σ за модулем дорівнює силі F_Σ і направлена по тій самій лінії дії в протилежний бік.

Сила F'_Σ для цієї системи є силою, що врівноважує, і разом із цими силами утворює урівноважену систему

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, F'_\Sigma) \equiv 0, \quad (1.130)$$

також

$$(F_\Sigma, F'_\Sigma) \equiv 0. \quad (1.131)$$

Оскільки обидві записані вище системи еквівалентні нулю, тобто урівноважені, то можна застосувати до них будь-яку умову рівноваги, наприклад

$$\sum M_x(F_i) = 0. \quad (1.132)$$

Запишемо цю умову для обох систем:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) + M_x(F'_\Sigma) = 0; \quad (1.133)$$

$$M_x(F_\Sigma) + M_x(F'_\Sigma) = 0. \quad (1.134)$$

Оскільки праві частини цієї рівності дорівнюють одна одній, то дорівнювати одна одній будуть і ліві:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) = M_x(F_\Sigma), \quad (1.135)$$

оскільки члени $M_x(F'_\Sigma)$ взаємно знищилися.

Отже,

$$\sum M_x(F_i) = M_x(F_\Sigma). \quad (1.136)$$

Теорема доведена.

1.8 Центр тяжіння

1.8.1 Центр паралельних сил

Центром паралельних сил називається така точка на лінії дії рівнодійної системи паралельних сил, через яку проходить рівнодійна, і в тому випадку, якщо всі сили системи обернути довкола їхніх точок прикладання на один і той саме кут, зберігаючи паралельність сил.

Покажемо існування центра паралельних сил на системі двох сил F_1 і F_2 (рис. 1.62).

На підставі теореми про складання двох паралельних сил, направлених в один бік, визначимо рівнодійну цих сил і положення її лінії дії з формул:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (1.137)$$

Неважко побачити, що точка C , що лежить на лінії AB , яка поєднує точки прикладання цих сил, є центром двох паралельних сил F_1 і F_2 , оскільки під час повороту їх на один і той саме кут α відношення плечей BC і CA не зміниться і рівнодійна також пройде через точку C .

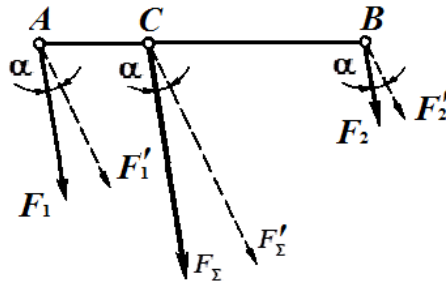


Рисунок 1.62

Якщо дано систему n паралельних сил, то рівнодійну цієї системи можна знайти, послідовно попарно складаючи всі сили. На лінії дії рівнодійної системи паралельних сил також існуватиме точка, що має властивість центра паралельних сил. Виведемо формули для визначення координат центра системи n паралельних сил.

Нехай надані просторова система n паралельних сил і рівнодійна цієї системи. Виберемо систему осей координат і позначимо координати точок прикладання сил цієї системи, а також координати точки прикладання рівнодійної (рис. 1.63).

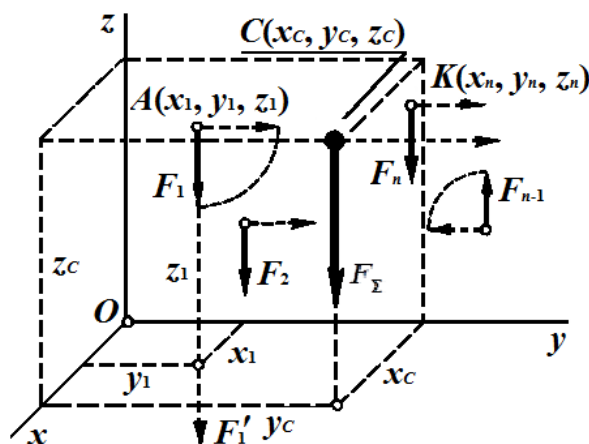


Рисунок 1.63

Запишемо моменти сил цієї системи відносно осі y . Для того щоб легко уявити, чому дорівнює момент сили відносно осі, варто подумки перенести силу уздовж лінії дії до положення, коли точка прикладання сили з'явиться в площині координатних осей (сила F_1' на рис. 1.63):

$$\begin{aligned} M_y(F_1) &= F_1 x_1, \\ M_y(F_2) &= F_2 x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ M_y(F_n) &= F_n x_n, \\ M_y(F_\Sigma) &= F_\Sigma x_C. \end{aligned} \tag{1.138}$$

Застосуємо доведену в попередньому параграфі теорему про момент рівнодійної відносно осі. Тоді

$$F_\Sigma x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n, \tag{1.139}$$

звідки

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F_\Sigma}. \tag{1.140}$$

Записавши моменти сил відносно осі x і знов застосувавши теорему про момент рівнодійної, отримаємо

$$y_C = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \dots + F_n y_n}{F_\Sigma}. \tag{1.141}$$

Для визначення координати z_C обернемо всі сили системи довкола їхніх точок прикладання в один бік, щоб сили стали паралельні осі y . Водночас точка C не змінить свого положення, оскільки вона є центром паралельних сил цієї системи.

Запишемо моменти всіх сил відносно осі x і застосуємо теорему про момент рівнодійної, унаслідок чого отримаємо

$$z_C = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \dots + F_n z_n}{F_\Sigma}. \tag{1.142}$$

Рівнодійна системи паралельних сил дорівнює їхній алгебраїчній сумі, тобто $F_\Sigma = \sum F_i$. Застосувавши скорочену форму запису, отримаємо формули

для визначення координат центра паралельних сил у такому вигляді:

$$x_c = \frac{\sum(F_i x_i)}{\sum F_i}; \quad y_c = \frac{\sum(F_i y_i)}{\sum F_i}; \quad z_c = \frac{\sum(F_i z_i)}{\sum F_i}. \quad (1.143)$$

Зазначимо, що у виведених формулах сили і моменти сил беруть із знаком за раніше встановленими правилами.

1.8.2 Визначення положення центра тяжіння

Сила, з якою тіло притягується до Землі, називається силою тяжіння.

Елементарною часткою тіла називається така мала частка, положення якої в просторі визначається координатами однієї точки. Розглянемо тіло, що складається з великої кількості елементарних часток. Сили тяжіння кожної частки, направлені до центру Землі, утворюють систему сил, що сходяться, але для тіл, розміри яких малі порівняно з розмірами Землі, з достатньою точністю можна вважати ці сили системою паралельних сил.

Центром тяжіння тіла називається центр паралельних сил тяжіння всіх елементарних часток тіла.

Центр тяжіння є геометрична точка, яка може лежати поза тілом (наприклад, кільце, циліндр з отвором).

Координати центра тяжіння тіла знаходять за тими самими формулами, що і координати центра паралельних сил, а саме:

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i}; \quad y_c = \frac{\sum(G_i y_i)}{\sum G_i}; \quad z_c = \frac{\sum(G_i z_i)}{\sum G_i}, \quad (1.144)$$

де G_i – сила тяжіння кожної елементарної частки тіла;

x_i, y_i, z_i – координати частки;

$\sum G_i$ – сила тяжіння всього тіла.

Якщо тіла однорідні, за такими самими формулами можна визначати координати центра тяжіння об'ємів, площ і ліній. Наприклад, для абсциси x_c отримаємо такі формули:

– сила тяжіння елементарної частки, виражена через її об'єм V_i , дорівнює

$$G_i = \gamma V_i, \quad (1.145)$$

де γ – питома сила тяжіння (для однорідного тіла – величина постійна). Тоді

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma \sum(V_i x_i)}{\gamma \sum V_i}, \quad (1.146)$$

отже, для об'єму

$$x_c = \frac{\sum(V_i x_i)}{\sum V_i}; \quad (1.147)$$

– якщо тіло є однорідною пластинкою завтовшки h , то сила тяжіння елементарної частки, виражена через площу A_i , дорівнює

$$G_i = \gamma h A_i; \quad (1.148)$$

тоді

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma h \sum(A_i x_i)}{\gamma h \sum A_i}, \quad (1.149)$$

отже, для площі

$$x_c = \frac{\sum(A_i x_i)}{\sum A_i}; \quad (1.150)$$

– якщо тіло є однорідним дротом постійного поперечного перетину A , то сила тяжіння елементарної частки, виражена через довжину l_i , дорівнює

$$G_i = \gamma A l_i, \quad (1.151)$$

тоді

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma A \sum(l_i x_i)}{\gamma A \sum l_i}, \quad (1.152)$$

отже, для лінії

$$x_c = \frac{\sum(l_i x_i)}{\sum l_i}. \quad (1.153)$$

1.8.3 Методи знаходження центра тяжіння

Розглянемо три методи знаходження центра тяжіння: метод симетрії, метод розбиття і метод негативних мас.

Метод симетрії

Уявимо собі однорідне тіло, яке має площину симетрії. Виберемо таку систему координат, щоб осі x і z лежали в площині симетрії (рис. 1.64).

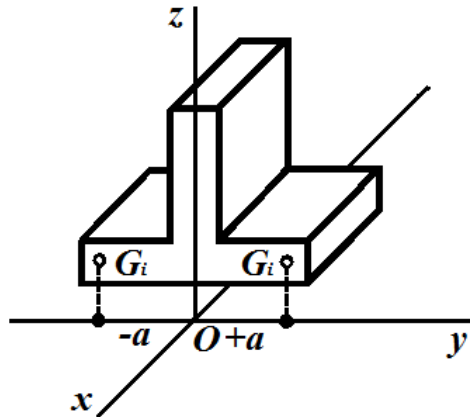


Рисунок 1.64

У цьому випадку кожній елементарній частці силою тяжіння G_i з абсцисою $y_i = +a$ відповідає така сама елементарна частка з абсцисою $y_i = -a$, тоді

$$y_c = \frac{\sum (G_i y_i)}{\sum G_i} = 0. \quad (1.154)$$

Звідси випливає висновок: якщо однорідне тіло має площину симетрії, то центр тяжіння тіла лежить у цій площині.

Аналогічно можна довести і такі положення:

- якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр тяжіння тіла лежить на цій осі;
- якщо однорідне тіло має дві осі симетрії, то центр тяжіння знаходиться в точці їхнього перетину;
- центр тяжіння однорідного тіла обертання лежить на осі обертання.

Метод розбиття

Цей метод полягає в тому, що тіло розбивають на найменшу кількість частин, сили тяжіння і положення центрів тяжіння яких відомі, після чого застосовують виведені раніше формули.

Допустимо, що ми розбили тіло силою тяжіння G на три частини G' , G'' , G''' , абсциси центрів тяжіння цих частин x'_c , x''_c , x'''_c відомі. Візьмемо формулу для визначення абсциси центра тяжіння всього тіла

$$x_c = \frac{\sum (G_i x_i)}{G_i} \quad (1.155)$$

і перепишемо її в такому вигляді:

$$x_c \sum G_i = \sum (G_i x_i) \text{ або } Gx_c = \sum (G_i x_i). \quad (1.156)$$

Останнє рівняння запишемо для кожної з трьох частин тіла окремо:

$$G'x'_c = \sum (G'_i x'_i); G''x''_c = \sum (G''_i x''_i); G'''x'''_c = \sum (G'''_i x'''_i). \quad (1.157)$$

Склавши праві і ліві частини цих трьох рівностей, отримаємо

$$G'x'_c + G''x''_c + G'''x'''_c = \sum (G'x'_c) + \sum (G''x''_c) + \sum (G'''x'''_c) = \sum (G_i x_i). \quad (1.158)$$

Але права частина останньої рівності є добутком Gx_c , оскільки

$$Gx_c = \sum (G_i x_i), \quad (1.159)$$

отже,

$$x_c = \frac{G'x'_c + G''x''_c + G'''x'''_c}{G}, \quad (1.160)$$

що і потрібно було довести.

Аналогічно,

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{G'y'_c + G''y''_c + G'''y'''_c}{G}; \\ z_c &= \frac{G'z'_c + G''z''_c + G'''z'''_c}{G}. \end{aligned} \quad (1.161)$$

Отримані формули аналогічні формулам для визначення координат центрів тяжіння, виведеним у попередньому пункті. Тому у вихідні формули можна підставляти не сили тяжіння елементарних часток G_i , а сили тяжіння кінцевих частин; під координатами x_i, y_i, z_i розуміють координати центрів тяжіння частин, на які тіло розбите.

Метод негативних мас

Цей метод полягає в тому, що тіло, що має вільні порожнини, вважають суцільними, а масу вільних порожнин вважають негативною. Вигляд формул для визначення координат центра тяжіння тіла не змінюється.

Отже, під час визначення центра тяжіння тіла, що має вільні порожнини, слід застосовувати метод розбиття, але вважати масу вільних порожнин негативною.

1.8.4 Положення центра тяжіння деяких фігур

Прямокутник. Оскільки прямокутник має дві осі симетрії, то центр тяжіння його площі знаходиться в точці перетину цих осей, інакше кажучи, у точці перетину діагоналей прямокутника.

Трикутник. Нехай дано трикутник ABD (рис. 1.65). Розіб'ємо його на елементарні (нескінченно вузькі) смужки, паралельні стороні AD . Центр тяжіння кожної смужки лежатиме на медіані Bd , отже, на цій медіані лежатиме центр тяжіння всієї площі трикутника. Розбивши трикутник на елементарні смужки, паралельні стороні AB , побачимо, що шуканий центр тяжіння лежить і на медіані aD , отже, центр тяжіння площі трикутника лежить у точці перетину його медіан. З геометрії відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться відносно основи 1:2. Із подібності трикутників CNd і BMd отримаємо

$$CN = \frac{h}{3}. \quad (1.162)$$

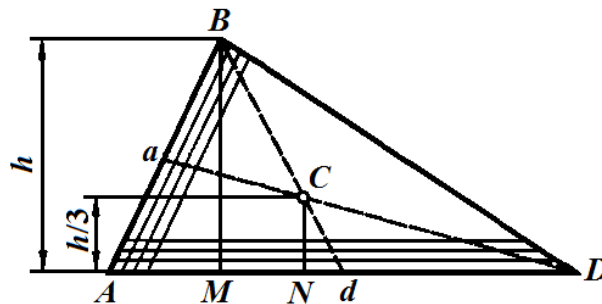


Рисунок 1.65

Отже, центр тяжіння площі трикутника лежить на відстані одній третини висоти від кожної основи.

Дуга кола. Візьмемо дугу AB кола радіусом R із центральним кутом 2α (рис. 1.66). Систему координат виберемо так, щоб початок координат був у центрі кола, а вісь x ділила дугу навпіл, тоді $y_C = 0$ унаслідок симетрії дуги відносно осі x . Визначимо x_C .

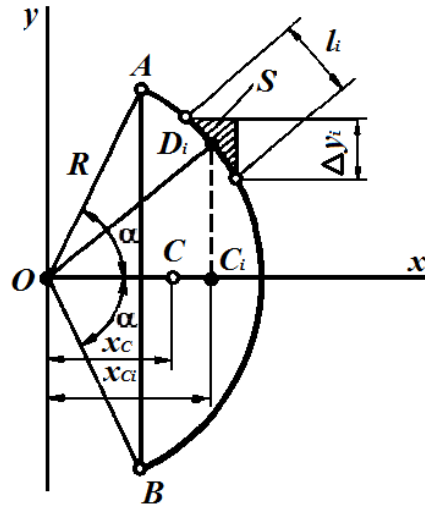


Рисунок 1.66

Розіб'ємо дугу AB на елементарні частини l_i , одна з яких змальована на рисунку 1.66. Тоді,

$$x_c = \frac{\sum (l_i x_{Ci})}{\sum l_i}. \quad (1.163)$$

Дугу l_i унаслідок незначної довжини приймемо за відрізок прямої. З подібності $\triangle OD_i C_i$ і елементарного $\triangle S$ (на кресленні заштрихований) отримаємо

$$\frac{l_i}{\Delta y_i} = \frac{R}{x_{Ci}} \text{ або } l_i x_{Ci} = R \Delta y_i. \quad (1.164)$$

Тоді

$$x_c = \frac{\sum (l_i x_{Ci})}{\sum l_i} = \frac{\sum (R \Delta y_i)}{l} = \frac{R \sum \Delta y_i}{l} = R \frac{AB}{l}, \quad (1.165)$$

оскільки $\sum \Delta y_i = AB$, а $\sum l_i = l$ – довжина дуги AB .

Проте $AB = 2R \sin \alpha$, а $l = 2R\alpha$, отже,

$$x_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.166)$$

За $\alpha = \frac{\pi}{2}$ рад (півколо)

$$x_c = \frac{2R}{\pi}. \quad (1.167)$$

Круговий сектор. Візьмемо сектор радіусом R з центральним кутом 2α (рис. 1.67). Проведемо осі координат, як показано на кресленні, тоді $y_C = 0$. Визначимо x_C , для чого розіб'ємо сектор на ряд елементарних секторів, кожен з яких унаслідок незначної довжини дуги l_i приймемо за рівнобедрений трикутник із висотою R . Тоді центр тяжіння кожного елементарного сектора лежатиме на дузі радіусу $2R/3$ і задача визначення центра тяжіння сектора зведеться до визначення центра тяжіння дуги кола радіусу $2R/3$, отже,

$$x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}. \quad (1.168)$$

За $\alpha = \frac{\pi}{2}$ рад (півколо)

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}. \quad (1.169)$$

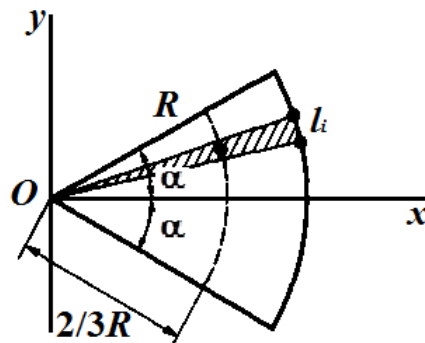


Рисунок 1.67

Приклад 1.13. Визначити положення центра тяжіння тонкої однорідної пластинки, форма якої і розміри в міліметрах показані на рисунку 1.68.

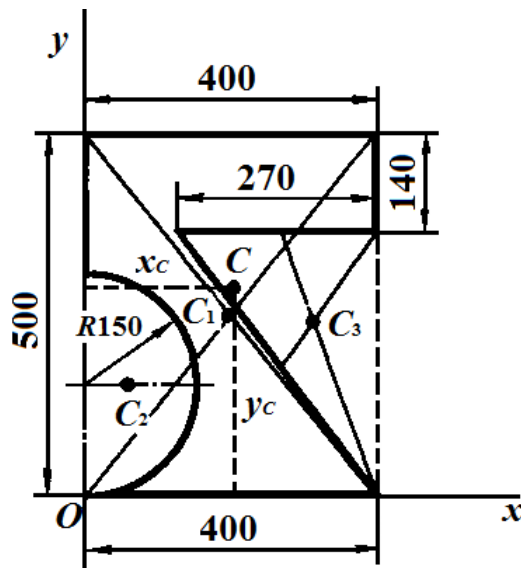


Рисунок 1.68

Розв'язок. Виберемо осі координат, як показано на рисунку 1.68. Уявимо собі задану фігуру такою, що складається з трьох частин: прямокутника 400×500 , півкола і трикутника, а площі двох останніх частин вважатимемо негативними. Тоді

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}; y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

де

$$A_1 = 40 \times 50 = 2\,000 \text{ см}^2; x_1 = 20 \text{ см};$$

$$A_2 = -\frac{\pi}{2} \cdot 15^2 = -353 \text{ см}^2; x_2 = \frac{4 \times 15}{3\pi} = 6,37 \text{ см};$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \times 27 \times 36 = -486 \text{ см}^2; x_3 = 13 + \frac{2}{3} \times 27 = 31 \text{ см};$$

$$y_1 = 25 \text{ см}; y_2 = 15 \text{ см}; y_3 = \frac{2}{3} \times 36 = 24 \text{ см}.$$

Підставивши значення і зробивши обчислення, отримаємо

$$x_c = 19,5 \text{ см}, y_c = 28,4 \text{ см}.$$

Приклад 1.14. Визначити положення центра тяжіння перетину, складеного з двутавра № 22 (2) і швелера № 20 (1), як показано на рисунку 1.69.

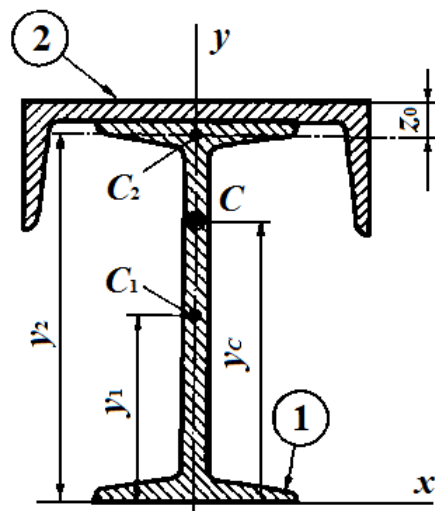


Рисунок 1.69

Розв'язок. З курсу креслення відомо, що номер профілю прокату відповідає найбільшому габаритному розміру його перетину, вираженому в сантиметрах.

Оскільки перетин, складений з двотавра і швелера, є фігурою, симетричною відносно осі y , то центр тяжіння такого перетину лежить на цій осі, тобто $x_c = 0$. За довідником визначимо площі та координати центрів тяжіння двотавра 1 і швелера 2.

Для двотаврового перетину

$$A_1 = 15,2 \text{ см}^2; y_1 = 22 / 2 = 11 \text{ см.}$$

Для швелерного перетину

$$A_2 = 12 \text{ см}^2, y_2 = 22 + d - z_0 = 22 + 0,32 - 1,25 = 21,07 \text{ см,}$$

де d – товщина стінки швелера;

z_0 – розмір, що визначає положення центра тяжіння швелера.

Застосуємо формулу для визначення ординати центра тяжіння всього перетину:

$$y_c = \frac{\sum(A_i y_i)}{\sum A_i},$$

тоді

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{15,2 \times 11 + 12 \times 21,07}{15,2 + 12} = 15,4 \text{ см.}$$

Отже, було визначено положення центра тяжіння перетину, складеного з двотавра і швелера.

2 КІНЕМАТИКА

2.1 Кінематика точки

2.1.1 Основні поняття кінематики

Кінематика – частина теоретичної механіки, у якій вивчаються рухи матеріальних тіл без врахування їхніх мас і сил, що діють на них.

Коли в механіці говорять про рух тіла, то мають на увазі під цим зміну з часом його положення в просторі відносно інших тіл. Зазвичай з тілом, відносно якого вивчають рух, зв'язують яку-небудь систему координат, яку разом із вибраним способом виміру часу називають системою відліку. Якщо координати всіх точок тіла у вибраній системі відліку залишаються весь час незмінними, то тіло знаходиться у спокої. Якщо розглядається рух тіла відносно умовно нерухомої системи відліку, то рух називають абсолютним; рух тіла відносно рухливої системи відліку називають відносним. У світі все знаходиться в безперервному русі, тому всі рухи є відносними, проте умовно можна уявити собі й абсолютний рух, наприклад рух відносно Землі.

2.1.2 Основні визначення теорії механізмів і машин

Теорія механізмів і машин займається застосуванням законів теоретичної механіки до механізмів і машин.

Ознайомимося з основними визначеннями теорії механізмів і машин.

Механізмом називається сукупність зв'язаних між собою тіл, що мають певні рухи. Механізми слугують для передачі або перетворення руху.

Машина – це механізм або поєднання механізмів, що здійснюють певні доцільні рухи для перетворення енергії (енергетичні машини), зміни форми, властивостей, стану і положення предмету праці (робочі машини) бо для збору, переробки і використання інформації (інформаційні машини).

Таким чином, всяка машина складається з одного або декількох механізмів, але не всякий механізм є машиною.

Робота механізму або машини обов'язково супроводжується тим або іншим рухом її органів.

Простою частиною механізму є ланка. Ланка – це одне тіло або незмінне поєднання тіл.

Дві ланки, сполучені між собою, і такі, що допускають відносний рух, називаються кінематичною парою. Кінематичні пари бувають нижчі і вищі. Ланки нижчих пар стикаються по поверхнях (поступальні, обертальні та гвинтові пари), ланки вищих пар стикаються по лініях і точках (зубчасті пари, підшипники кочення).

Сукупність кінематичних пар називається кінематичним ланцюгом. Кінематичні пари і ланцюги можуть бути плоскими і просторовими.

Механізм виходить з кінематичного ланцюга шляхом закріплення однієї з ланок. Ця нерухома ланка називається станиною або стійкою.

Ланка, що обертається довкола нерухомої осі, називається кривошипом. Ланка, що коливається довкола нерухомої осі, називається балансиrom або коромислом. Ланка, що здійснює складний рух паралельно якійсь площині, називається шатуном. Ланка, що здійснює зворотно-поступальний рух, називається повзуном. Ланка, виконана у вигляді рейки з пазом, називається кулісою, у пазу ковзає камінь куліси.

Ланка, якій ззовні повідомляється певний рух, називається ведучою. Останні рухливі ланки називаються веденими.

Як приклад розглянемо широко поширений кривошипно-ползунний механізм, схематично зображений на рисунку 2.1.

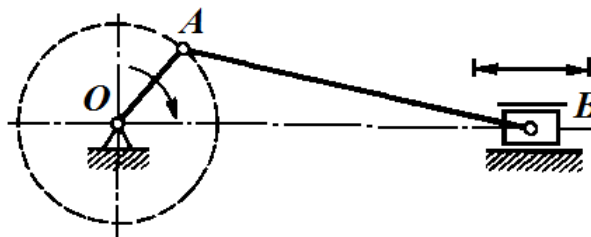


Рисунок 2.1

Цей механізм призначений для перетворення обертального руху в зворотно-поступальний (наприклад, у компресорах, поршневих насосах, ексцентрикових і кривошипних пресах) або, навпаки, для перетворення зворотно-поступального руху в обертальний (наприклад, у парових машинах, двигунах внутрішнього згорання).

Кривошипно-ползунний механізм складається з чотирьох ланок: кривошипа OA, шатуна AB, повзуна B, станини і чотирьох кінематичних пар: обертальної пари станина – кривошип, обертальної пари кривошип – шатун, обертальної пари шатун – повзун і поступальної пари повзун – станина.

Кривошипно-ползунний механізм – плоский, його провідною ланкою є або кривошип, або повзун.

2.1.3 Способи завдання руху точки

Знання законів руху тіла означає знання законів руху кожної його точки, тому вивчення кінематики почнемо з вивчення руху геометричної точки.

Траєкторією точки називається безліч (геометричне місце) положень рухомої точки в конкретній системі відліку. Залежно від форми траєкторії рух

точки буває двох видів: прямолінійний і криволінійний. Розглянемо два способи завдання руху точки: природний і координатний.

Природний спосіб полягає в тому, що рух точки задається її траєкторією і рівнянням руху по цій траєкторії (законом руху).

Рівняння руху в загальному вигляді записується так:

$$s = f(t), \quad (2.1)$$

де s – відстань точки від початкового положення, що є функцією часу;

t – час руху точки від початкового моменту.

Знаючи траєкторію точки і рівняння руху по цій траєкторії, можна визначити положення точки у будь-який момент часу, для чого потрібно в рівність $s = f(t)$ підставити час.

Під час свого руху точка проходить деякий шлях, що також є функцією часу. Слід підкреслити, що шлях, пройдений точкою, збігається з відстанню від початку відліку лише тоді, коли точка весь час рухається в одному напрямку і початок її руху збігається з початком відліку.

Координатний спосіб полягає в тому, що рух точки задається рухом її проекцій уздовж осей координат.

Рівняння плоского руху точки в координатній формі записуються у такий спосіб:

$$x = f(t), y = f_1(t). \quad (2.2)$$

Знаючи рівняння руху точки в координатній формі, можна, підставивши в ці рівняння час, визначити положення проекцій точки, а отже, і самої точки у будь-який момент часу (рис. 2.2).

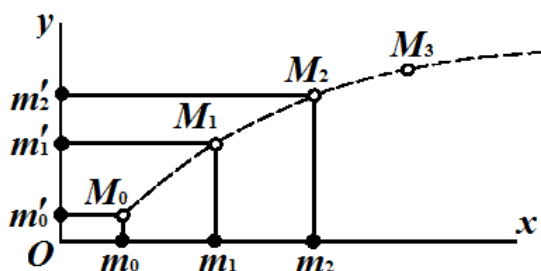


Рисунок 2.2

Приклад 2.1. Кривошип OA обертається навколо нерухомої осі так, що кут $\varphi = 10t$, рад. Довжина $OA = AB = 0,8$ м. Знайти рівняння руху і траєкторію середньої точки M шатуна, а також рівняння руху повзуна B , якщо в початковий момент повзун знаходився в крайньому положенні; осі координат вказані на рисунку 2.3.

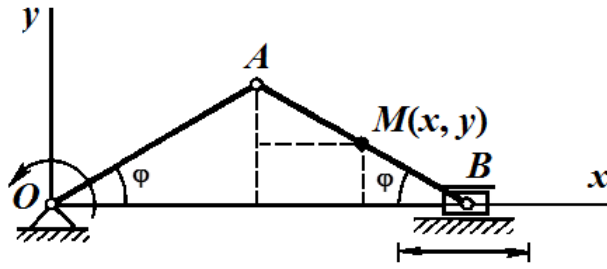


Рисунок 2.3

Розв'язок. Визначимо координати точки M залежно від кута φ :

$$x_M = OA \cos \varphi + AM \cos \varphi = 0,8 \cos \varphi + 0,4 \cos \varphi = 1,2 \cos \varphi;$$

$$y_M = MB \sin \varphi = 0,4 \sin \varphi.$$

Таким чином, рівняння руху точки M запишуться так:

$$x_M = 1,2 \cos 10t, \quad y_M = 0,4 \sin 10t.$$

Щоб визначити рівняння траєкторії точки M , виключимо з рівнянь руху час. Перетворимо рівняння руху і зведемо їх у квадрат:

$$\frac{x_M^2}{1,2^2} = \cos^2 10t, \quad \frac{y_M^2}{0,4^2} = \sin^2 10t.$$

Склавши праві і ліві частини цієї рівності, отримаємо рівняння траєкторії точки M :

$$\frac{x_M^2}{1,2^2} + \frac{y_M^2}{0,4^2} = 1.$$

Точка M рухається по еліпсу з півосями завдовжки 1,2 і 0,4 м. Оскільки повзун B рухається прямолінійно уздовж осі, то $y_B = 0$.

Для здобуття рівняння руху повзуна визначимо абсцису точки B залежно від кута φ :

$$x_B = OA \cos \varphi + AB \cos \varphi = 0,8 \cos \varphi + 0,8 \cos \varphi = 1,6 \cos \varphi.$$

Тоді рівняння руху повзуна запишеться так:

$$x_B = 1,6 \cos 10t, \text{ м.}$$

Приклад 2.2. Кривошип OM куліси Вольфа рівномірно обертається навколо нерухомої осі O так, що кут $\varphi = \frac{\pi}{4}t$, рад (рис. 2.4). Довжина стрижня $OM = 0,2$ м. У початковий момент стрижень OM склав з віссю Ox кут $\varphi_0 = 0$. Скласти рівняння руху куліси.

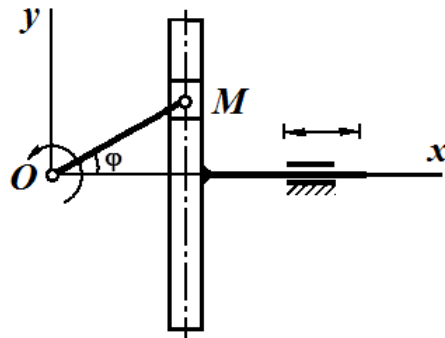


Рисунок 2.4

Розв'язок. З конструкції механізму видно, що куліса рухається зворотно-поступально уздовж осі x . Очевидно, що куліса рухатиметься за тим саме законом, за яким рухається проекція точки M на вісь x , отже,

$$x = x_M = OM \cos \varphi = 0,2 \cos \frac{\pi}{4}t, \text{ м.}$$

2.1.4 Швидкість точки

Швидкість – це кінематична міра руху точки, що характеризує швидкість зміни її положення.

Як відомо з фізики, за рівномірного руху швидкість вимірюється довжиною шляху, пройденого за одиницю часу:

$$v = \frac{s}{t} = \text{const} \quad (2.3)$$

(передбачається, що початки відліку шляху і часу збігаються). Одиниця швидкості

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{довжина}}{\text{час}} = \text{метр за секунду} = \text{м/с}. \quad (2.4)$$

Швидкість – це величина векторна. Під час прямолінійного рівномірного руху швидкість постійна і за модулем, і за напрямком, а вектор її збігається з траєкторією (рис. 2.5, а).

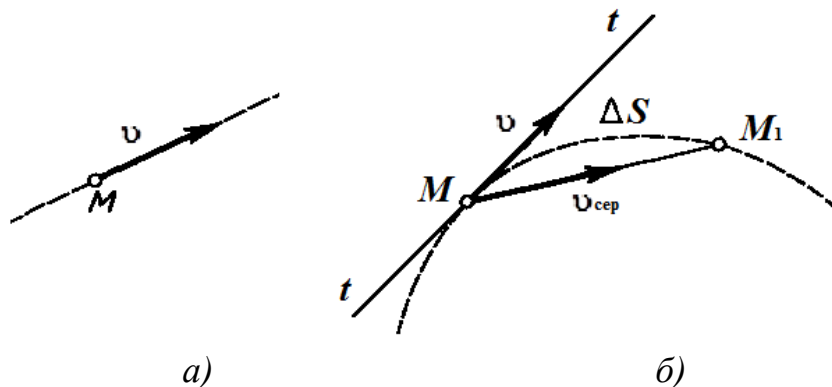


Рисунок 2.5

Під час криволінійного руху швидкість точки по напрямку змінюється. Для того, щоб встановити напрямок вектора швидкості за криволінійного руху, розіб'ємо траєкторію на нескінченно малі ділянки шляху, які можна вважати унаслідок їхньої крихти прямолінійними. Тоді на кожній ділянці умовна швидкість v_n такого прямолінійного руху буде направлена по хорді. У межі за Δs , що прагне до нуля, хорда збігається з дотичною, отже, швидкість у кожен момент часу направлена по дотичній до траєкторії у бік руху (рис. 2.5, б).

За нерівномірного руху точки модуль її швидкості змінюється. Уявимо собі точку, рух якої заданий природним способом рівнянням

$$s = f(t). \quad (2.5)$$

Якщо за невеликий проміжок часу Δt точка пройшла шлях Δs , то її середня швидкість дорівнює

$$v_{\text{сep}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2.6)$$

Середня швидкість не дає уявлення про дійсну швидкість у кожен конкретний момент часу (дійсну швидкість інакше називають миттєвою). Чим менше проміжок часу, за який визначається середня швидкість, тим ближче вона до дійсної.

Дійсна швидкість – це межа, до якої прагне середня швидкість за Δt , що прагне до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{сep}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Отже, числове значення швидкості дорівнює

$$v = \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Дійсна швидкість за будь-якого руху точки дорівнює першій похідній координати (тобто відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Рух, у якому швидкість з часом зростає, називають прискореним; рух, у якому швидкість з часом зменшується, – сповільненим.

Приклад 2.3. Поїзд рухається згідно з рівнянням

$$s = 0,1t^2 + t,$$

де t – у секундах;

s – у метрах.

Визначити середню швидкість поїзда за проміжок часу між кінцем десятої і двадцятої секунд і дійсну швидкість в наприкінці двадцятої секунди.

Розв’язок. Для визначення середньої швидкості поїзда знайдемо прирости часу і шляху за вказаний проміжок часу:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10 \text{ с},$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (0,1t_2^2 + t_2) - (0,1t_1^2 + t_1) = 0,1 \times 20^2 + 20 - 0,1 \times 10^2 - 10 = 40 \text{ м}.$$

Середня швидкість поїзда визначиться так:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ м/с}.$$

Для визначення дійсної швидкості поїзда продиференціюємо рівняння руху за часом, внаслідок чого отримаємо формулу, що виражає залежність дійсної швидкості від часу:

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial (0,1t^2 + t)}{\partial t} = 0,2t + 1.$$

Підставивши в цей вираз час t_2 , набудемо значення дійсної швидкості в наприкінці двадцятої секунди:

$$v_{20} = 0,2t_2 + 1 = 0,2 \times 20 + 1 = 5 \text{ м/с}.$$

Нехай точка з положення M , рухаючись нерівномірно, за час Δt перейшла в положення M_1 (рис. 2.5, б). Дугу MM_1 позначимо Δs . Відрізок MM_1 назвемо вектором переміщення точки M . Допустимо, що точка M перейшла за час Δt у положення M_1 , рухаючись по хорді рівномірно, тоді швидкість такого прямолінійного руху буде

$$v_n = \frac{MM_1}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

Перейдемо до межі, помноживши заздалегідь чисельник і знаменник правої частини на Δs , і представимо межу добутку як добуток меж:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2.10)$$

Оскільки за Δt , що прагне до нуля, Δs також прагне до нуля, то перша межа (межа відношення хорди до відповідної дуги) дорівнює одиниці. Друга межа дає першу похідну шляху за часом, тобто дійсну швидкість, де вектор v_n у межі буде направлений по дотичній, тобто співпадає з вектором дійсної швидкості v . Таким чином,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = v. \quad (2.11)$$

Отже, межа вектора умовної швидкості v_n , дорівнює межі відношення вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу, коли останній прагне до нуля, дорівнює вектору дійсної швидкості точки.

2.1.5 Прискорення точки в прямолінійному русі

Прискорення є кінематичною мірою зміни вектора швидкості точки.

Прискорення є векторною величиною. За прямолінійного руху точки вектор швидкості завжди збігається з траєкторією і тому вектор зміни швидкості також збігається з траєкторією.

Відомо, що прискоренням є зміна швидкості в одиницю часу. Якщо за невеликий проміжок часу Δt швидкість точки змінилася на Δv , то середнє прискорення

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.12)$$

Середнє прискорення не дає уявлення про дійсне прискорення в кожен конкретний момент часу (дійсне прискорення інакше називають миттєвим). Чим менше проміжок часу, за який визначають середнє прискорення, тим ближче воно до теперішнього. Дійсне прискорення є межею, до якої прагне середнє прискорення за Δt , що прагне до нуля:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2.13)$$

Отже, враховуючи, що $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, отримаємо

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості або другій похідній координаті (відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Одиниця прискорення

$$[a] = \frac{[v]}{[t]^2} = \frac{\text{довжина}}{\text{час у квадраті}} = \text{метр за секунду в квадраті} = \text{м/с}^2. \quad (2.15)$$

Приклад 2.4. Точка рухається прямолінійно згідно із законом $s = t^4 + 2t$ (s – в метрах, t – у секундах). Знайти її середнє прискорення в проміжку між моментами $t_1 = 5$ с, $t_2 = 7$ с, а також її дійсне прискорення в момент $t_3 = 6$ с.

Розв'язок. Спочатку визначаємо швидкість точки:

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = 4t^3 + 2.$$

Підставляючи сюди замість t його значення $t_1 = 5$ с і $t_2 = 7$ с, знаходимо:

$$v_5 = 4 \times 5^3 + 2 = 502 \text{ м/с},$$

$$v_7 = 4 \times 7^3 + 2 = 1374 \text{ м/с}.$$

Отже, приріст швидкості за конкретний проміжок часу $\Delta t = 7 - 5 = 2$ с буде:

$$\Delta v = v_7 - v_5 = 1374 - 502 = 872 \text{ м/с}.$$

Середнє прискорення точки

$$a_{\text{сер}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{872}{2} = 436 \text{ м/с}^2.$$

Щоб визначити дійсне прискорення точки, знаходимо похідну від швидкості за часом:

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = 12 t^2.$$

Підставляючи сюди замість t значення $t_3 = 6$ с, отримаємо

$$a_6 = 12 \times 6 = 432 \text{ м/с}^2.$$

2.1.6 Прискорення точки в криволінійному русі

Під час руху точки по криволінійній траєкторії швидкість змінює свій напрямок.

Уявимо собі точку M , яка за час Δt , рухаючись по криволінійній траєкторії, перемістилася в положення M_1 (рис. 2.6).

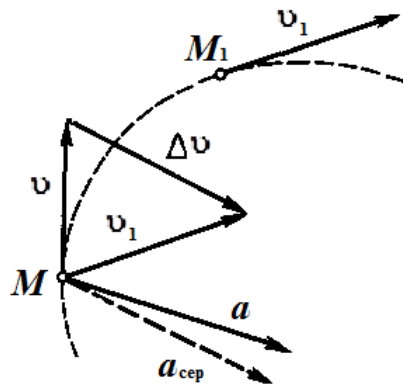


Рисунок 2.6

Вектор приросту (зміни) швидкості позначимо Δv , тоді

$$\Delta v = v_1 - v. \quad (2.16)$$

Для знаходження вектора Δv перенесемо вектор v_1 у точку M і побудуємо трикутник швидкостей. Визначимо вектор середнього прискорення:

$$a_{\text{сер}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.17)$$

Вектор $a_{\text{сер}}$ паралельний вектору Δv , оскільки від ділення векторної величини на скалярну напрямок вектора не змінюється. Вектор дійсного прискорення – це межа, до якої прагне відношення вектора приросту швидкості до відповідного проміжку часу, коли останній прагне до нуля:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.18)$$

Таку межу називають векторною похідною. Отже, дійсне прискорення точки в криволінійному русі дорівнює векторній похідній швидкості за часом.

З рисунку 2.6 видно, що вектор прискорення в криволінійному русі завжди направлений у бік угнутості траєкторії.

2.1.7 Поняття про кривизну кривих ліній

Як побачимо в наступному розділі, прискорення точки в криволінійному русі залежить від міри вигину її траєкторії, тобто від кривизни траєкторії.

Розглянемо криволінійну траєкторію точки M (рис. 2.7, а). Кут $\Delta\varphi$ між дотичними до кривої в двох сусідніх точках називається кутом суміжності.

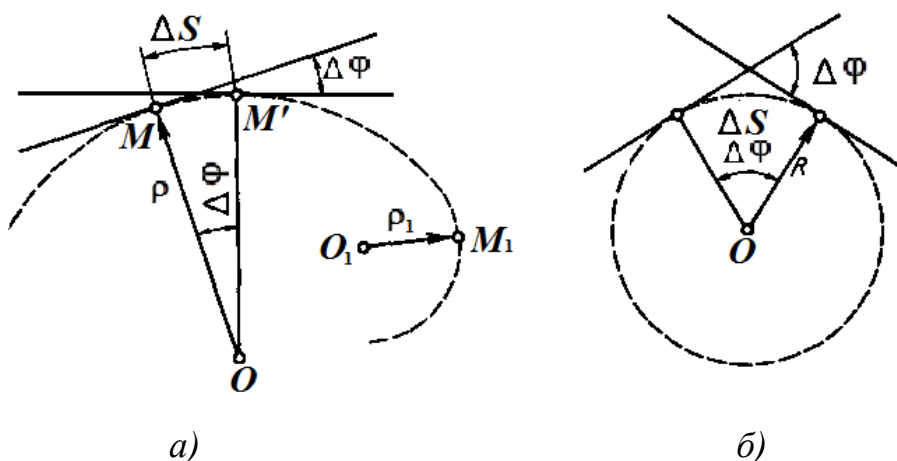


Рисунок 2.7

Кривизною кривої в конкретній точці називається межа відношення кута суміжності до відповідної довжини Δs дуги, коли остання прагне до нуля.

Позначимо кривизну k , тоді

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}. \quad (2.19)$$

Розглянемо коло радіусу R (рис. 2.7, 6). Оскільки

$$\Delta s = R \Delta \varphi, \quad (2.20)$$

то

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{R \Delta \varphi} = \frac{1}{R}. \quad (2.21)$$

Отже, кривизна кола в усіх точках однакова і дорівнює

$$k = \frac{1}{R}. \quad (2.22)$$

Для кожної точки конкретної кривої можна підібрати таке коло, кривизна якого дорівнює кривизні кривої в певній точці. Радіус ρ такого кола називається радіусом кривизни кривої в конкретній точці, а центр цього кола називається центром кривизни.

Отже, кривизна кривої в конкретній точці є величиною, зворотною радіусу кривизни в цій саме точці:

$$k = \frac{1}{\rho}. \quad (2.23)$$

Вочевидь, що кривизна прямої лінії дорівнює нулю, а радіус кривизни дорівнює нескінченності:

$$k = 0; \rho = \frac{1}{k} = \infty. \quad (2.24)$$

2.1.8 Теорема про проекцію прискорення на дотичну і нормаль

Проекція повного прискорення на нормаль до траєкторії називається нормальним прискоренням; проекція повного прискорення на дотичну до траєкторії називається дотичним прискоренням. Дотичне прискорення інколи називають тангенціальним.

Теорема. Нормальне прискорення дорівнює квадрату швидкості, що ділиться на радіус кривизни траєкторії в певній точці, дотичне прискорення – першій похідній швидкості за часом.

Нехай заданий плоский рух точки M по траєкторії AB (рис. 2.8). За час Δt точка перейшла з положення M у положення M_1 , та пройшла шлях $\Delta s = \cup MM_1$.

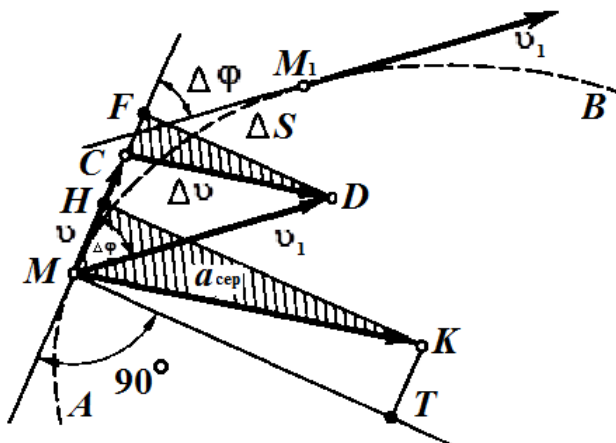


Рисунок 2.8

Вектор приросту швидкості за час Δt дорівнює

$$\Delta v = v_1 - v. \quad (2.25)$$

Визначимо вектор середнього прискорення:

$$a_{\text{сеп}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \quad (2.26)$$

відкладемо цей вектор з точки M паралельно вектору Δv .

Спроекуємо вектор $a_{\text{сеп}}$ на дотичну і нормаль, точку D також спроекуємо на дотичну.

Розглянемо подібні трикутники CDF і MKH . З подібності цих трикутників маємо

$$\frac{HK}{FD} = \frac{MH}{CF} = \frac{a_{\text{сеп}}}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta t \Delta v} = \frac{1}{\Delta t}, \quad (2.27)$$

звідки

$$HK = \frac{FD}{\Delta t}, MH = \frac{CF}{\Delta t}. \quad (2.28)$$

Перейдемо до межі за Δt , що прагне до нуля ($\Delta\varphi$ і Δs також прагнуть до нуля):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^{HK} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{FD}{\Delta t} = a_n \text{ (нормальне прискорення),} \quad (2.29)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}^{MH} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CF}{\Delta t} = a_t \text{ (дотичне прискорення).} \quad (2.30)$$

Обчислимо першу межу за Δt , що прагне до нуля:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{FD}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v_1 \sin \Delta\varphi}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{\rho}, \quad (2.31)$$

оскільки

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v, \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\partial s}{\partial t} = v. \quad (2.32)$$

Обчислимо другу межу за Δt , що прагне до нуля:

$$\begin{aligned} a_t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CF}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \right) - v}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v_1 - v}{\Delta t} - 2 \frac{v_1 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

оскільки

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v, \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1, \quad (2.34)$$

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{2} = 0, \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\rho} = 0, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \quad (2.35)$$

(межа другого доданку дорівнює нулю, оскільки він є добутком кінцевих величин, помножених на нуль).

Отже,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, a_t = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2.36)$$

теорема доведена.

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна побачити, що якщо немає зміни швидкості за модулем, то $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$; якщо немає зміни швидкості за напрямком (прямолінійний рух), то $a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0$. Звідси витікає, що дотичне прискорення характеризує зміна швидкості лише за модулем, а нормальне – лише за напрямком.

Знаючи дотичне і нормальне прискорення, можна обчислити модуль і напрямок повного прискорення за формулами:

– модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}; \quad (2.37)$$

– напрямок прискорення

$$\cos(a_t, a) = a_t / a. \quad (2.38)$$

Часто дотичне і нормальне прискорення розглядають не як проекції, а як складові повного прискорення, тобто як векторні величини. Відомо, що якщо осі взаємно перпендикулярні, то проекції вектора на ці осі та його складові, направлені по цих осях, дорівнюють за модулем.

Дотичне, нормальне і повне прискорення зображені на рисунку 2.9.

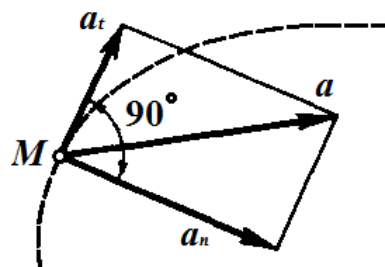


Рисунок 2.9

Якщо $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} > 0$, то вектори дотичного прискорення та швидкості направлені в один бік і рух буде прискореним. Якщо $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} < 0$, то вектор дотичного прискорення направлений у бік, протилежний вектору швидкості, і рух буде сповільненим.

Вектор нормального прискорення завжди направлений до центра кривизни, тому це прискорення інакше називають доцентровим.

Приклад 2.5. Точка ободу маховика в період розгону рухається згідно з рівнянням $s = 0,1t^3$ (t – у секундах, s – у метрах). Радіус маховика дорівнює 2 м. Визначити нормальне і дотичне прискорення точки в мить, коли її швидкість $v = 30$ м/с.

Розв'язок. Для визначення швидкості обчислимо похідну переміщення за часом:

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = 0,3 t^2,$$

звідки

$$t = \sqrt{\frac{v}{0,3}} = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

Для цього моменту потрібно визначити нормальне і дотичне прискорення точки. Знаходимо дотичне прискорення як похідну швидкості за часом:

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0,6 t.$$

Підставляємо у вираз для дотичного прискорення значення $t = 10$ с:

$$a_t = 0,6 \times 10 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення точки визначаємо за формулою:

$$a_n = \frac{v}{\rho}.$$

Для моменту часу $t = 10$ с знаходимо

$$a_n = \frac{30^2}{2} = 450 \text{ м/с}^2.$$

2.1.9 Види руху точки залежно від прискорень

Аналізуючи виведені формули дотичного і нормального прискорень, можна встановити такі види руху точки:

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0, a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0, \quad (2.39)$$

у цьому випадку рух нерівномірний ($v \neq \text{const}$) криволінійний ($\rho \neq \infty$);

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0, a_r = \frac{v^2}{\rho} \neq 0, \quad (2.40)$$

у цьому випадку рух рівномірний ($v = \text{const}$) криволінійний ($\rho \neq \infty$);

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0, a_r = \frac{v^2}{\rho} = 0, \quad (2.41)$$

у цьому випадку рух нерівномірний ($v \neq \text{const}$) прямолінійний ($\rho = \infty$);

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \text{const} \neq 0, \quad (2.42)$$

у цьому випадку рух рівнозмінний (криволінійний, якщо $a_n \neq 0$, прямолінійний, якщо $a_n = 0$);

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0, a_r = \frac{v^2}{\rho} = 0, \quad (2.43)$$

у цьому випадку рух рівномірний прямолінійний, який є єдиним виглядом руху без прискорення.

2.1.10 Формули і графіки рівномірного руху точки

Як було встановлено раніше, за рівномірного руху дотичне прискорення $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Отже, модуль швидкості точки під час рівномірного руху є величиною постійною:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v = \text{const}. \quad (2.44)$$

Звідси

$$\partial s = v \partial t. \quad (2.45)$$

Інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$\int_{s_0}^s \partial s = \int_0^t v \partial t, s - s_0 = vt, \quad (2.46)$$

де s_0 – початкова відстань.

Отже, формули рівномірного руху точки мають такий вигляд:

$$v = \text{const}, s = s_0 + vt. \quad (2.47)$$

Графіки швидкості та шляху рівномірного руху показані на рисунку 2.10, де передбачається, що $s_0 = 0$.

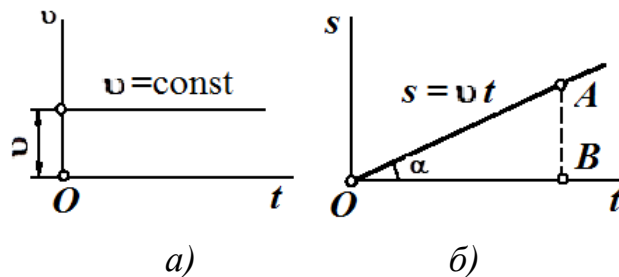


Рисунок 2.10

Неважко показати, що швидкість точки під час рівномірного руху пропорційна тангенсу кута α між прямолінійним графіком цього руху і позитивним напрямком осі часу:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\mu_s \cdot AB}{\mu_t \cdot OB} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.48)$$

де μ_s – масштаб шляху, що виражається в м/мм;

μ_t – масштаб часу, що виражається в с/мм.

2.1.11 Формули і графіки рівнозмінного руху точки

Як було встановлено раніше, під час рівнозмінного руху дотичне прискорення є величиною постійною:

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \text{const}. \quad (2.49)$$

Звідси

$$\partial v = a_t \partial t. \quad (2.50)$$

Інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$\int_{v_0}^v \partial v = \int_0^t a_t \partial t, v - v_0 = a_t t. \quad (2.51)$$

де v_0 – початкова швидкість.

Формула швидкості в остаточному вигляді

$$v = v_0 + a_t t. \quad (2.52)$$

Оскільки

$$\partial s = v \partial t, \quad (2.53)$$

то, інтегруючи цей вираз, отримаємо формулу переміщень (відстаней від початкового положення)

$$\int_{s_0}^s \partial s = \int_0^t (v + a_t t) \partial t, \quad s - s_0 = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}, \quad (2.54)$$

де s_0 – початкова відстань.

Вважаючи $s_0 = 0$, запишемо формули рівнозмінного руху точки:

$$a_t = \text{const}, \quad v = v_0 + a_t t, \quad s = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}. \quad (2.55)$$

Якщо точка здійснює криволінійний рух, то вона має нормальне прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (2.56)$$

а модуль її повного прискорення визначиться за формулою:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (2.57)$$

Якщо точка рухається прямолінійно, то $a_n = 0$, а повне прискорення дорівнює дотичному: $a = a_t$.

У рівноприскореному русі напрямок вектора прискорення збігається з напрямком вектора швидкості; у рівноуповільненому русі вектор прискорення направлений у бік, зворотній вектору швидкості.

Формулу переміщень (відстаней від початку відліку) перетворимо, виключивши з неї час t . Із формули швидкості маємо

$$t = \frac{v - v_0}{a_t}, \quad (2.58)$$

тоді

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{a_t} + \frac{a_t}{2} \left(\frac{v - v_0}{a_t} \right)^2. \quad (2.59)$$

Після перетворень отримаємо

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t}. \quad (2.60)$$

У деяких випадках для розв'язання задач зручно користуватися формулою переміщень рівнозмінного руху в іншому вигляді. Оскільки

$$s = v_{\text{ср}} t, \text{ то } s = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (2.61)$$

Графіки прискорення, швидкості та переміщення точки під час прямолінійного рівнозмінного руху подано на рисунку 2.11.

Крива переміщень (відстаней) під час рівнозмінного руху є параболою.

Відомо, що якщо побудувати графік якоїсь функції $y = f(x)$, то в будь-якій точці цього графіка

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.62)$$

де α – кут, який утворює в цій точці дотична до кривої з позитивним напрямком осі абсцис.

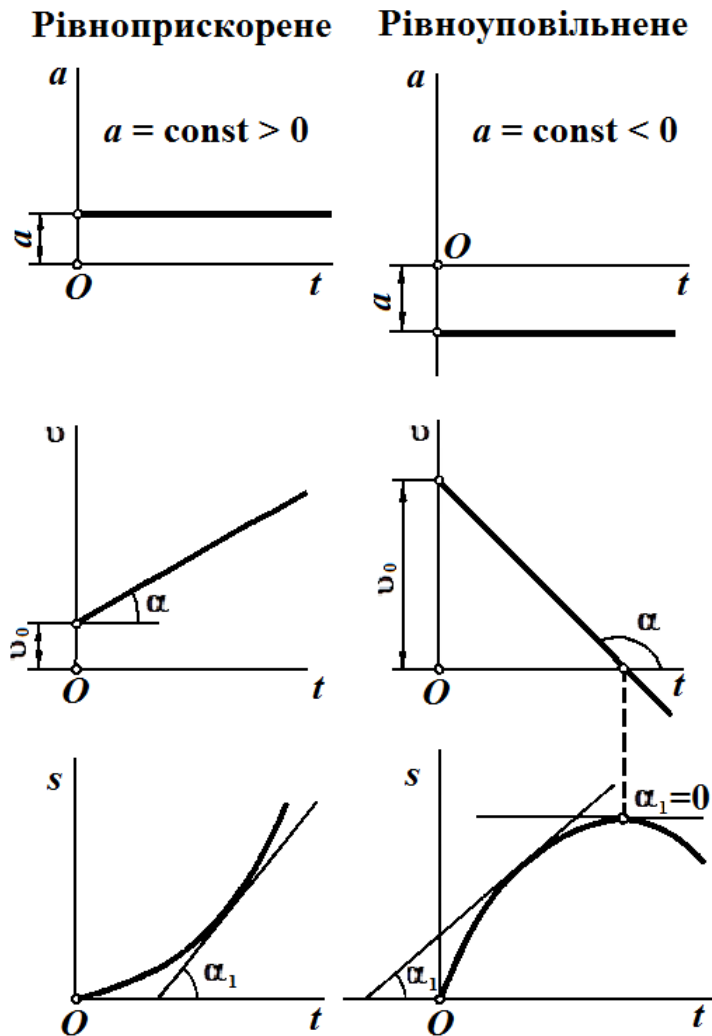


Рисунок 2.11

Застосовуючи це положення до зображених на рисунку 2.11 графіків руху точки і враховуючи масштаби шляху і часу, отримаємо

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (2.63)$$

де α_1 – кут між дотичною до графіка переміщення і позитивним напрямком осі часу;

μ_s – масштаб шляху, що виражається в м/мм;

μ_t – масштаб часу, що виражається в с/мм.

З викладеного випливає, що якщо дотична до кривої переміщень складає гострий кут із позитивним напрямком осі часу, то у цей момент швидкість точки позитивна; при тупому куті швидкість точки у цей момент негативна. Якщо дотична в якійсь точці кривої переміщень паралельна осі часу, то швидкість точки у цей момент дорівнює нулю (рис. 2.11).

Аналогічний зв'язок є між графіками швидкості та прискорення прямолінійного руху точки, а саме

$$a = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.64)$$

де α – кут між дотичною до графіка швидкості і позитивним напрямком осі часу;

μ_v – масштаб швидкості, що виражається в (м/с)/мм.

Крива переміщень за рівноприскореного руху має опуклість, направлену вниз (друга похідна переміщення за часом позитивна), а при рівноуповільненому русі – опуклість, направлену вгору (друга похідна переміщення за часом негативна).

Приклад 2.6. Вагон скачується по похилій площині з прискоренням $a = 0,2$ м/с. Яку швидкість розвине вагон наприкінці похилої гори, довжина якої 250 м? Початкова швидкість вагону $v_0 = 1$ м/с.

Розв'язок. Для визначення швидкості руху вагону наприкінці похилої гори застосуємо формулу

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

З цієї формули знайдемо

$$v^2 = 2as + v_0^2.$$

Підставляючи значення величин і виділяючи квадратний корінь, отримаємо

$$v = \sqrt{2as + v_0^2} = \sqrt{2 \times 0,2 \times 250 + 1} = \sqrt{101} = 10,05 \text{ м/с}.$$

2.1.12 Теорема про проекцію швидкості на координатну вісь

Якщо рух точки заданий певним способом, то швидкість її знаходять як першу похідну переміщення за часом; якщо рух точки заданий в координатній формі, то знаходять за допомогою теореми про проекцію швидкості на координатну вісь.

Теорема. Проекція швидкості на координатну вісь дорівнює першій похідній від відповідної координати за часом.

Нехай плоский рух точки M задано координатним способом рівняннями руху

$$x = f(t), y = f_1(t). \quad (2.65)$$

За час Δt точка перейшла з положення M у положення M_1 (рис. 2.12). Якби точка рухалася по хорді рівномірно, то її умовна швидкість дорівнювала б

$$v_n = \frac{MM_1}{\Delta t}. \quad (2.66)$$

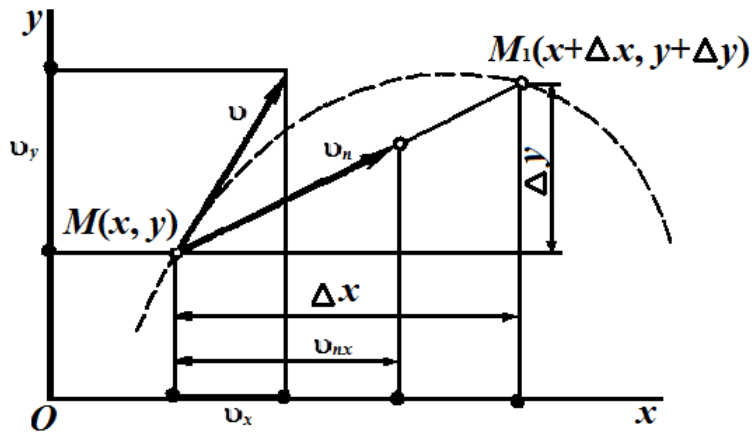


Рисунок 2.12

Спроектуємо вектор v_n і точку M на вісь x , тоді

$$v_{nx} = v_n \cos(v_n, x) = \frac{MM_1}{\Delta t} \cos(v_n, x). \quad (2.67)$$

Оскільки

$$MM_1 \cos(v_n, x) = \Delta x, \text{ то } v_{nx} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.68)$$

Перейдемо до межі за Δt , що прагне до нуля:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{nx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.69)$$

Оскільки швидкість v_n у межі дає дійсну швидкість, то межа, що стоїть у лівій частині рівності, дає проекцію дійсної швидкості на вісь x , а в правій частині є перша похідна від абсциси x за часом, отже,

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad (2.70)$$

теорема доведена.

Аналогічно,

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (2.71)$$

Знаючи дві проекції швидкості, можна знайти її модуль і напрямок за формулами:

– модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad (2.72)$$

– напрямок швидкості

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{v}. \quad (2.73)$$

Приклад 2.7. Знайти модуль швидкості середини M шатуна кривошипно-ползунного механізму і швидкості повзуна B , якщо $OA = AB = 0,8$ м, а кут $\varphi = \omega t$, де ω – постійна величина, а t виражається в секундах (рис. 2.3).

Розв'язок. Для розв'язання задачі скористаємося рівняннями руху точки M і повзуна B , отриманими в прикладі 2.1:

$$x_M = 1,2 \cos \varphi = 1,2 \cos \omega t, \text{ м};$$

$$y_M = 0,4 \sin \varphi = 0,4 \sin \omega t, \text{ м};$$

$$x_B = 1,6 \cos \varphi = 1,6 \cos \omega t, \text{ м}.$$

Для визначення швидкості точки M застосуємо теорему про проекцію швидкості на координатну вісь, внаслідок чого отримаємо:

$$v_{M_x} = \frac{\partial x_M}{\partial t} = -1,2 \omega \sin \omega t,$$

$$v_{M_y} = \frac{\partial y_M}{\partial t} = 0,4 \omega \cos \omega t.$$

Визначимо модуль швидкості точки M :

$$v_M = \sqrt{v_{M_x}^2 + v_{M_y}^2} = \sqrt{(1,2 \omega \sin \omega t)^2 + (0,4 \omega \cos \omega t)^2} = 0,4 \omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1}, \text{ м/с}.$$

Оскільки повзун B рухається прямолінійно, то для визначення модуля швидкості його руху продиференціюємо рівняння руху за часом, внаслідок чого отримаємо

$$v_B = \frac{\partial x_B}{\partial t} = -1,6 \sin \omega t, \text{ м/с.}$$

2.1.13 Теорема про проекцію прискорення на координатну вісь

Якщо рух точки заданий дійсним способом, то її прискорення визначають за допомогою теореми про проекцію прискорення на дотичну і нормаль; якщо рух точки заданий координатним способом, то за допомогою теореми про проекцію прискорення на координатну вісь.

Теорема. Проекція прискорення на координатну вісь дорівнює другій похідній від відповідної координати за часом.

З доведеної в попередньому розділі теореми видно, що проекція швидкості точки на координатну вісь дорівнює швидкості проекції точки на ту саме вісь.

Аналогічне положення буде справедливе і для прискорення точки, тобто проекція прискорення точки на координатну вісь дорівнює прискоренню проекції точки на ту саму вісь. Оскільки проекції точок на осі рухаються прямолінійно, то, згідно з 2.1.5,

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (2.74)$$

Знаючи дві проекції прискорення, можна знайти модуль і напрямок повного прискорення за формулами:

– модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad (2.75)$$

– напрямок прискорення

$$\cos(a, x) = \frac{a_x}{a}. \quad (2.76)$$

Приклад 2.8. Рух точки визначається рівняннями

$$x = 20 t^2 + 5, y = 15 t^2 - 3$$

(t – у секундах; x і y – у метрах). Визначити модуль і напрямок швидкості та прискорення у момент часу $t = 2$ с.

Розв'язок. Для визначення модуля і напрямку швидкості точки застосуємо теорему про проекцію швидкості на координатну вісь. Продиференціювавши за часом рівняння руху точки, отримаємо:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = 40 t, v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = 30 t.$$

Модуль швидкості точки визначимо за формулою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(40 t)^2 + (30 t)^2} = 50 t.$$

Підставивши значення часу $t = 2$ с, отримаємо

$$v_2 = 50 \times 2 = 100 \text{ м/с}.$$

Напрямний косинус визначимо за формулою:

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{v} = \frac{40 t}{50 t} = 0,8.$$

Для визначення модуля і напрямку прискорення точки застосуємо теорему про проекцію прискорення на координатну вісь. Другий раз продиференціювавши за часом рівняння руху точки, отримаємо:

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 40, a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 30.$$

Модуль прискорення точки визначиться за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ м/с}^2.$$

Напрямний косинус визначиться за формулою:

$$\cos(a, x) = \frac{a_x}{a} = \frac{40}{50} = 0,8.$$

Кут між векторами v , a і віссю x буде кутом першої чверті, оскільки

$$\sin(v, x) = \sin(a, x) = 0,6$$

є величиною позитивною.

Оскільки напрямок вектора швидкості у будь-який момент часу залишається незмінним, той рух точки є прямолінійним і повне її прискорення можна визначити за формулою:

$$a = \frac{v}{\partial t} = \frac{\partial(50t)}{\partial t} = 50 \text{ м/с}^2.$$

2.2 Простіші рухи твердого тіла

2.2.1 Поступальний хід

Розрізняють два види простіших рухів твердого тіла: поступальний хід і обертання довкола нерухомої осі.

Рух тіла, за якого будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною своєму початковому положенню, називається поступальним. Уявлення про поступальний хід можна отримати, спостерігаючи рух кузова вагону трамвая на прямолінійній ділянці шляху, де поступально рухається стіл уздовжно-стругального верстата, поршень стаціонарного двигуна внутрішнього згорання тощо.

Теорема. За поступального ходу всі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Нехай за час Δt тіло, рухаючись поступально, перемістилося з положення AB у положення A_1B_1 , для чого довільна точка A пройшла шлях Δs_A , а інша довільна точка B пройшла шлях Δs_B :

$$\cup AA_1 = \Delta s_A, \cup BB_1 = \Delta s_B. \quad (2.77)$$

З'єднаємо точки A і A_1 , B і B_1 хордами. Оскільки $AB = A_1B_1$ (тіло тверде) і $AB \parallel A_1B_1$ (рух поступальний), то фігура ABB_1A_1 є паралелограмом. Отже, хорда AA_1 рівна і паралельна хорді BB_1 .

Візьмемо проміжне положення прямої A_2B_2 і з'єднаємо кінці цього відрізка з точками A і A_1 , B і B_1 .

Аналогічно попередньому можна довести, що вписані ламані лінії AA_2A_1 і BB_2B_1 мають попарно рівні і паралельні сторони. Якщо нескінченну кількість разів подвоювати кількість сторін цих ламаних ліній, то в межі вони дадуть дуги Δs_A і Δs_B . Оскільки ці ламані лінії завжди однакові, то вони однакові і в межі, отже, траєкторії довільних точок A і B будуть однакові:

$$\cup \Delta s_A = \cup \Delta s_B. \quad (2.78)$$

Оскільки точки A і B вибрані абсолютно довільно, то, отже, траєкторії всіх точок тіла будуть однакові.

Доведемо тепер, що швидкості і прискорення точок A і B , а отже, і всіх точок тіла в кожен конкретний момент часу рівні. Оскільки вектори переміщень точок A і B рівні між собою:

$$AA_1 = BB_1, \quad (2.79)$$

то, розділивши обидві частини цієї векторної рівності на Δt і перейшовши до межі за Δt , що прагне до нуля, отримаємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB_1}{\Delta t}. \quad (2.80)$$

Ці межі дають вектори швидкостей точок, отже,

$$v_A = v_B. \quad (2.81)$$

Перенесемо вектори швидкостей v_{A1} і v_{B1} в точці A і B і знайдемо вектори приросту швидкостей Δv_A і Δv_B . Розглянемо трикутники AMN і BM_1N_1 . Ці трикутники рівні, а їхні рівні сторони попарно паралельні, отже,

$$\Delta v_A = \Delta v_B. \quad (2.82)$$

Розділимо обидві частини цієї векторної рівності на Δt і перейдемо до межі за Δt , що прагне до нуля, внаслідок чого отримаємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_B}{\Delta t} \quad (2.83)$$

або

$$a_A = a_B; \quad (2.84)$$

теорема доведена.

Таким чином, поступальній хід твердого тіла сповна визначається рухом однієї з його точок, отже, всі формули кінематики точки застосовні для тіла, рухомого поступально.

Приклад 2.9. Ланки (1) і (2) механізму копіювального приладу (рис. 2.13) можуть повертатися відносно опор A і C і шарнірно з'єднані з диском (3); диск і лінійка (6) шарнірно з'єднані ланками (4) і (5). Довести, що диск (3) і лінійка (6) можуть здійснювати поступальний хід, якщо $AB = CD$, $AC = BD$, $EF = GH$, $EG = FH$.

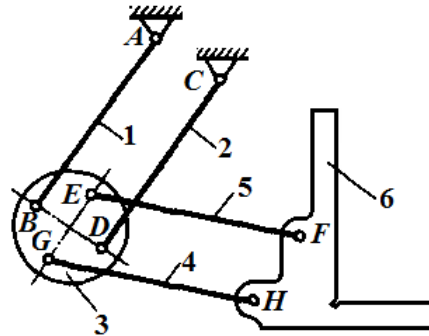


Рисунок 2.13

Розв'язок. Розглянемо чотирикутник $ABDC$. Оскільки протилежні сторони цього чотирикутника за умовою попарно рівні, то він є паралелограмом. Звідси витікає, що за будь-якого переміщення ланок (1) і (2) сторона BD залишається паралельній нерухомій стороні AC . Таким чином, згідно з визначенням поступального ходу, сторона BD і жорстко пов'язаний з нею диск можуть переміщатися лише поступально. Так само лише поступально може переміщатися і відрізок EG , жорстко пов'язаний з диском (3).

Далі розглянемо чотирикутник $EFHG$, який за умовою є паралелограмом за будь-якого положення механізму. Отже, сторона FH рухається так само, як і сторона EG , тобто поступально. Вочевидь, що лінійка (6), жорстко пов'язана із стороною FH , також може рухатися лише поступально.

У наведеному прикладі передбачалося, що ланками механізму є абсолютно тверді тіла.

2.2.2 Обертання довкола нерухомої осі

Рух, за якого принаймні дві точки твердого тіла або незмінної системи залишаються нерухомими, називається обертальним; пряма лінія, що з'єднує ці дві точки, називається віссю обертання. У визначенні обертального руху говориться про незмінну систему, тому що вісь обертання може лежати і поза тілом.

Розглянемо диск, що обертається довкола осі, перпендикулярної площині креслення (рис. 2.14). Точка O – слід цієї осі. Вочевидь, що траєкторії точок тіла, що обертається, є кола різних радіусів, розташовані в площині, перпендикулярній осі обертання, з центрами, що лежать на цій осі.

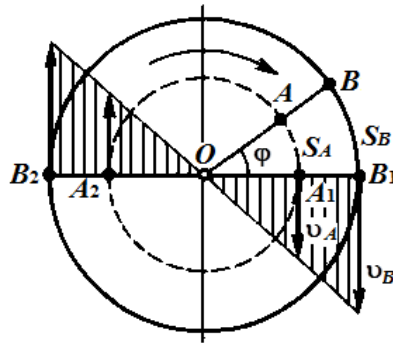


Рисунок. 2.14

Нехай за час t диск обернувся на кут φ . Водночас точка A пройшла шлях s_A , а точка B – шлях s_B . Оскільки точки, що знаходяться на різній відстані від осі обертання, за один і той саме проміжок часу проходять різні шляхи, то вони мають різні швидкості та прискорення.

Отже, при обертальному русі тіла точки його, що знаходяться на різній відстані від осі обертання, мають неоднакові траєкторії, швидкості та прискорення.

Звідси витікає, що лінійне переміщення (шлях), лінійна швидкість та прискорення не можуть характеризувати обертальний рух тіла загалом. Обертальний рух тіла можна характеризувати кутом φ , на який обернулося тіло за певний проміжок часу. Цей кут називається кутовим переміщенням тіла. Кутове переміщення виражається в радіанах (рад) або обертах (об); в останньому випадку кутове переміщення позначають N . Для встановлення залежності між φ і N складемо пропорцію:

$$1 \text{ об} - 2\pi \text{ рад},$$

$$N \text{ об} - \varphi \text{ рад}, \quad (2.85)$$

звідки

$$\varphi = 2\pi N, \text{ рад}, \quad (2.86)$$

де N – кількість зворотів тіла.

Кутове переміщення тіла є функцією часу, отже, закон обертального руху в найзагальнішому вигляді запишеться так:

$$\varphi = f(t). \quad (2.87)$$

З рисунка 2.14 видно, що шлях будь-якої точки тіла, що обертається,

$$s = r\varphi, \quad (2.88)$$

де r – відстань точки від осі обертання.

Швидкість будь-якої точки тіла визначається так:

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial(r\varphi)}{\partial t} = r \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.89)$$

(r винесли за знак похідної, оскільки для цієї точки твердого тіла ця величина постійна).

Вираз $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ позначимо ω і назовемо кутовою швидкістю. Кутова швидкість є кінематична міра руху тіла, що обертається, та характеризує прудкість його кутового переміщення:

$$\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.90)$$

Кутова швидкість дорівнює першій похідній кутового переміщення за часом.

Одиниця кутової швидкості

$$[\omega] = \frac{(\varphi)}{[t]} = \frac{\text{плоский кут}}{\text{час}} = \text{радіан за секунду} = \text{рад/с}. \quad (2.91)$$

Формула для визначення швидкості будь-якої точки тіла, що обертається, запишеться так:

$$v = \omega r. \quad (2.92)$$

Швидкість точки в кожен момент часу прямо пропорційна її відстані від осі обертання, отже, графік швидкостей точок, наприклад діаметра B_1B_2 , буде двома трикутниками (рис. 2.15). Вочевидь, що вектор швидкості точки тіла, що обертається, направлений перпендикулярно радіусу, який сполучає цю точку з віссю обертання. Якщо точка лежить на поверхні тіла, що обертається, то її швидкість називають обертальною.

У техніці швидкість обертання виражають в обертах за хвилину, позначають буквою n і називають частотою обертання. Установимо залежність між кутовою швидкістю і частотою обертання, вираженими відповідно в рад/с і хв⁻¹. Запишемо пропорцію:

$$\begin{aligned}\omega \text{ рад} - 1 \text{ с}, \\ 2\pi n \text{ рад} - 60 \text{ с}.\end{aligned}\tag{2.93}$$

З пропорції знайдемо

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с},\tag{2.94}$$

де n – частота обертання тіла, об/хв або хв⁻¹.

Приклад 2.10. Скільки часу (хв) продовжиться обточування вала діаметром $d = 180$ мм і завдовжки $l = 1\,000$ мм, якщо обточування ведеться за один прохід різця; подача різця за один зворот виробу $s_{об} = 0,5$ мм/об, а швидкість різання $v = 135$ м/хв.

Розв’язок. Насамперед визначимо кутову швидкість ω і частоту обертання n валу:

$$\omega = \frac{v}{0,5d} = \frac{135}{0,5 \times 0,18 \times 60} = 25 \text{ рад/с},$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \times 25}{3,14} = 238 \text{ хв}^{-1}.$$

Далі визначимо подачу різця за хвилину:

$$s_{хв} = s_{об} n = 0,5 \times 238 = 119 \text{ мм/хв} = 0,119 \text{ м/хв}.$$

Розділивши довжину оброблюваної поверхні на хвилинну подачі різця, визначимо машинний час, необхідний для обточування вала:

$$t = \frac{l}{s_{хв}} = \frac{1}{0,119} = 8,4 \text{ хв}.$$

2.2.3 Різні види обертального руху

Рівномірний обертальний рух. Якщо тіло обертається довкола нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю, то рух називається рівномірним. Формули рівномірного обертального руху:

$$\omega = \text{const}, \varphi = \omega t. \quad (2.95)$$

Дотичне, нормальне і повне прискорення будь-якої точки тіла, що рівномірно обертається, визначають так:

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial(\omega r)}{\partial t} = r \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (2.96)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r, \quad (2.97)$$

$$a_t = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n = \omega^2 r. \quad (2.98)$$

Приклад 2.11. Махове колесо обертається рівномірно з кутовою швидкістю 4π рад/с. Скільки зворотів колесо зробить за 2 хв?

Розв'язок. Застосуємо формулу рівномірного обертального руху і визначимо кутове переміщення колеса за час $t = 2$ хв $= 120$ с:

$$\varphi = \omega t = 4\pi \cdot 120 = 480\pi \text{ рад.}$$

Далі визначимо кількість обертів n тіла за той самий проміжок часу:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{480\pi}{2\pi} = 240 \text{ об.}$$

Нерівномірний обертальний рух. Якщо кутова швидкість тіла, що обертається, з часом змінюється, то рух називається нерівномірним. У найзагальнішому вигляді формули нерівномірного обертального руху запишуться так:

$$\varphi = f(t), \omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.99)$$

Дотичне прискорення будь-якої точки нерівномірного тіла, що обертається, визначають у такий спосіб:

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial(\omega r)}{\partial t} = r \frac{\partial \omega}{\partial t}. \quad (2.100)$$

Вираз $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ позначають α і називають кутовим прискоренням.

Кутове прискорення є кінематичною мірою зміни кутової швидкості тіла, що обертається:

$$\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.101)$$

Кутове прискорення дорівнює першій похідній кутової швидкості або другої похідної кутового переміщення за часом. Одиниця кутового прискорення:

$$[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{[\varphi]}{[t]^2}; \quad (2.102)$$

$$[\alpha] = \frac{\text{плоский кут}}{\text{час у квадраті}} = \text{радіан за секунду в квадраті} = \text{рад/с}^2.$$

Тепер можна записати формулу для визначення дотичного прискорення будь-якої точки тіла, що нерівномірно обертається a в такому вигляді:

$$a_t = \alpha r. \quad (2.103)$$

Нормальне прискорення визначається за такою самою формулою, як і в разі рівномірного обертання, тобто

$$a_n = \omega^2 r. \quad (2.104)$$

Повне прискорення

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2}, \quad (2.105)$$

звідки

$$a = r \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}. \quad (2.106)$$

Напрямний тангенс

$$\operatorname{tg}(a, a_n) = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha r}{\omega^2 r}, \quad (2.107)$$

звідки

$$\operatorname{tg}(a, a_n) = \frac{\alpha}{\omega^2}.$$

Якщо напрямок кутового прискорення збігається з напрямком обертання, то обертальний рух є прискореним, і навпаки (рис. 2.15).

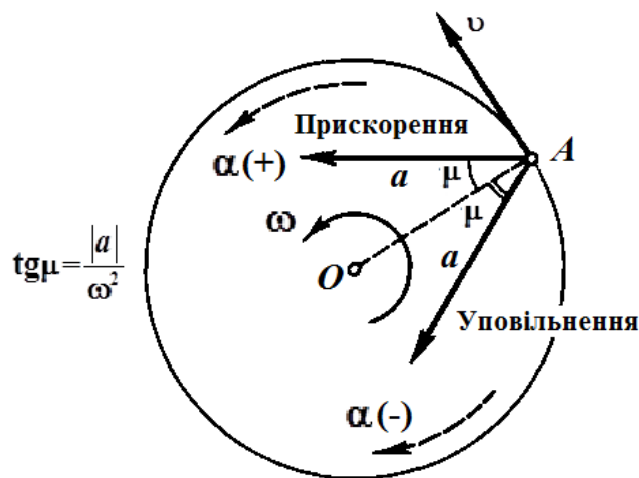


Рисунок 2.15

Приклад 2.12. Написати рівняння обертання диска парової турбіни під час пуску в хід, якщо відомо, що кут φ , рад, повороту диска пропорційний куту часу і $t = 3$ с кутова швидкість дорівнює 27π рад/с.

Розв'язок. Згідно з умовою рівняння обертання диска парової турбіни під час пуску в хід виглядатиме так:

$$\varphi = bt^3.$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності b продиференціюємо рівняння обертання диска, внаслідок чого отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega = \frac{\partial (bt^3)}{\partial t} = 3bt^2,$$

звідки

$$b = \frac{\omega}{3t^3}.$$

Підставивши в це рівняння значення часу і кутової швидкості, отримаємо

$$b = \frac{27\pi}{3 \times 3^3} = \pi.$$

Отже, рівняння руху диска турбіни має вигляд

$$\varphi = \pi t^3.$$

Рівнозмінний обертальний рух. Якщо тіло обертається довкола нерухомої осі з постійним кутовим прискоренням, то рух називається рівнозмінним. Формули цього виду обертального руху можуть бути отримані таким саме способом, яким були виведені формули рівнозмінного руху точки, тобто за допомогою інтегрального числення.

Отже, якщо тверде тіло обертається довкола нерухомої осі рівнозмінно, то

$$\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{const}, \quad (2.108)$$

звідки

$$\partial \omega = \alpha \partial t. \quad (2.109)$$

Інтегруючи цю рівність по t , отримаємо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \partial \omega = \int_0^t \alpha \partial t, \quad (2.110)$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість. Остаточно отримаємо формулу кутової швидкості у такому вигляді:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t. \quad (2.111)$$

Далі виведемо формулу кутового переміщення. Оскільки за будь-якого обертального руху

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega, \quad \partial \varphi = \omega \partial t, \quad (2.112)$$

то, інтегруючи цю рівність по t отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \partial \varphi &= \int_0^t \omega \partial t = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t) \partial t = \int_0^t \omega_0 \partial t + \int_0^t \alpha t \partial t, \\ \varphi - \varphi_0 &= \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}, \end{aligned} \quad (2.113)$$

де φ_0 – початкове кутове переміщення.

Якщо $\varphi_0 = 0$, то формула кутового переміщення матиме вигляд

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}. \quad (2.114)$$

Отже, формули рівнозмінного обертального руху твердого тіла записуються так:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{const}, \\ \omega &= \omega_0 + \alpha t, \\ \varphi &= \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

З виведених формул можна отримати формули кутового переміщення у вигляді:

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \text{ або } \varphi = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \quad (2.116)$$

Приклад 2.13. У інерційному акумуляторі маховик обертається в глибокому вакуумі з частотою $20\,000 \text{ хв}^{-1}$. Представлений самому собі, він продовжує обертатися до повної зупинки протягом двох тижнів. Визначити кутове прискорення маховика, вважаючи його постійним.

Розв'язок. Визначимо початкову кутову швидкість маховика і час обертання:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 20\,000}{30} \text{ рад/с};$$

$$t = 2 \text{ нед} \cdot 7 \text{ дн} \cdot 86\,400 \text{ с}.$$

Розділивши початкову кутову швидкість на якийсь час, дістанемо кутове прискорення:

$$\alpha = \frac{-\pi \times 20\,000}{30 \times 2 \times 7 \times 86\,400} = -0,001\,74 \text{ рад/с}^2.$$

Знак «-» показує, що обертання маховика було сповільненим.

2.2.4 Порівняння формул кінематики для поступального і обертального ходів

Порівнюючи формули кінематики точки або поступально рухомого тіла з формулами обертального руху тіла, легко відмітити, що основні з цих формул

аналогічні. Щоб із формул поступального ходу отримати формули обертального ходу, необхідно замість лінійного переміщення s підставити кутове переміщення φ , замість лінійної швидкості v – кутову швидкість ω , замість лінійного прискорення a – кутове прискорення α .

Порівняння формул поступального і обертального ходів зручно провести за допомогою таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Порівняння формул поступального і обертального ходів

Кінематична міра руху	Характер руху	Вигляд руху	
		поступальне	обертальне
Переміщення	Нерівномірний	$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
	Рівномірний	$s = vt$	$\phi = \omega t$
	Рівнозмінний	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{at^2}{2}$
Швидкість	Нерівномірний	$v = \frac{\partial s}{\partial t}$	$\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$
	Рівномірний	$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
	Рівнозмінний	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + at$
Прискорення дотичне	Нерівномірний	$a_t = \frac{\partial v}{\partial t}$	$\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial t}$
	Рівномірний	$a_t = 0$	$\alpha = 0$
	Рівнозмінний	$a_1 = \text{const}$	$\alpha = \text{const}$
Прискорення нормальне		$a_n = \frac{v^2}{\rho}$	$a_n = \omega^2 r$

2.2.5 Перетворення обертальних рухів

Перетворення обертальних рухів здійснюється всілякими механізмами, які називаються передачами. Найпоширеніші є такі механізми: зубчасті, фрикційні передачі і передачі гнучким зв'язком (наприклад, ремінні, канатні, стрічкові і ланцюгові). За допомогою цих механізмів здійснюється передача обертального руху від джерела руху (головного вала) до приймача руху (керованого вала).

Передачі характеризуються передавальним відношенням або передавальним числом.

Передавальним відношенням i називається відношення кутової швидкості провідної ланки до кутової швидкості веденої ланки.

Передавальне відношення може бути більше, менше або дорівнювати одиниці.

Передавальним числом i двох зв'язаних ланок називається відношення більшої кутової швидкості до меншої.

Передавальне число передачі завжди більше або дорівнює одиниці.

Для уніфікації позначень передавальні стосунки і передавальні числа всіх передач ми позначатимемо u , у деяких випадках з подвійним індексом, відповідним індексам ланок передачі. Отже, передавальне відношення

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2.117)$$

Зазначимо, що індексом 1 позначається провідна ланка передачі, а індексом 2 – ведене.

Передача, у якій кутова швидкість веденої ланки менше кутової швидкості ведучої, називається такою, що знижує; інакше передача називається такою, що підвищує.

У техніці найбільш поширені зубчасті, ремінні і ланцюгові передачі.

Розглянемо зубчасту передачу, схематично зображену на рисунку 2.16.

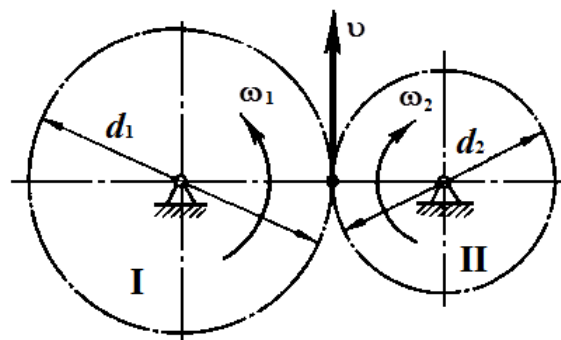


Рисунок 2.16

У місці зіткнення зубчастих коліс I і II швидкості точок першого і другого колеса однакові. Позначивши модуль цієї швидкості v , отримаємо

$$v = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\omega_2 d_2}{2}, \quad (2.118)$$

отже,

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (2.119)$$

Відомо, що діаметр ділильного кола зубчастого колеса дорівнює добутку його модуля на число зубів $d = mz$, тоді для пари зубчастих коліс

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.120)$$

Розглянемо ремінну передачу, схематично зображену на рисунку 2.17. За відсутності прослизання ремня по шківках

$$v = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\omega_2 d_2}{2}, \quad (2.121)$$

тоді для ремінної передачі

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (2.122)$$

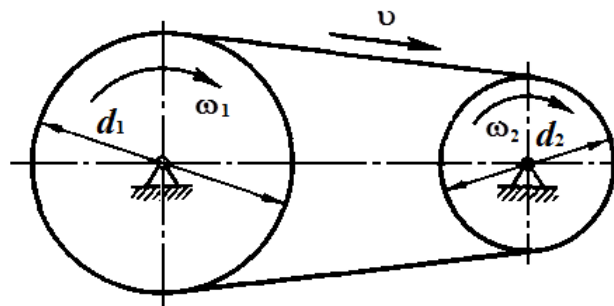


Рисунок 2.17

Для ланцюгових передач

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.123)$$

де z_1, z_2 – числа зубів провідної і веденої зірочок передачі.

Приклад 2.14. У механізмі домкрата за обертання рукоятки A обертаються зубчасті колеса 1, 2, 3, 4 і 5, які приводять у рух зубчасту рейку B домкрата (рис. 2.18). Визначити швидкість останньою, якщо рукоятка A робить $n = 30$ об./хв, число зубів коліс $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$; радіус п'ятого колеса $r = 4$ см.

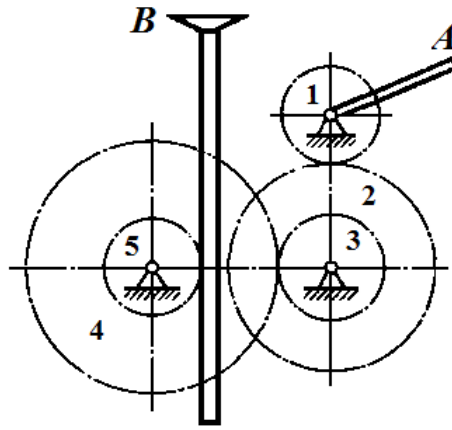


Рисунок 2.18

Розв'язок. Для пари зубчастих коліс 1 і 2 передавальне відношення

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передавальне відношення для пари коліс 3 і 4

$$u_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Перемноживши праві і ліві частини останніх двох рівностей, отримаємо

$$u_{12}u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}.$$

Оскільки зубчасті колеса 2 і 3 жорстко сидять на одному валу, то $\omega_2 = \omega_3$ і, отже,

$$u_{12}u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

Відношення ω_1/ω_4 є передавальне відношення двох пар зубчастих коліс, зображених на рисунку 2.20, а саме

$$u_{14} = u_{12}u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3},$$

тобто передавальне відношення двох пар зубчастих коліс дорівнює добутку передавальних відношень цих пар коліс.

Користуючись останньою формулою, визначимо кутову швидкість коліс (4) і (5), що жорстко сидять на одному валу ($\omega_4 = \omega_5$):

$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4}.$$

Оскільки

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 30}{30} = \pi \text{ рад/с},$$

то

$$\omega_4 = \omega_5 = \pi \times \frac{6}{24} \times \frac{8}{32} = \frac{\pi}{16} \text{ рад/с}.$$

Визначимо швидкість рейки B :

$$v = \omega_5 r_5 = \frac{\pi}{16 \times 4 \times 10^{-2}} = 0,78 \times 10^{-2} \text{ м/с} = 0,78 \text{ см/с}.$$

2.3 Складний рух точки

2.3.1 Поняття про складний рух точки

Рух точки відносно нерухомої системи координат називається абсолютним. Рух точки відносно рухливої системи координат називається відносним. Рух рухливої системи координат відносно нерухомої називається переносним.

Абсолютний рух точки є складним і складається з відносного і переносного рухів.

Пояснимо викладене з допомогою рисунку 2.19.



Рисунок 2.19

Нехай xOy – рухлива система координат, що переміщується в плоскості креслення рівномірно поступально уздовж осі x ; точка A рівномірно переміщається вгору по осі y . Якщо здійснюватиметься лише відносний рух, то точка перейде з положення A у положення A_1 . Якщо здійснюватиметься лише переносний рух, то точка з положення A потрапить у положення A_2 . Якщо ж одночасно здійснюються і відносний і переносний рухи, то точка за цей саме проміжок часу перейде з положення A у положення A_3 .

Приклад 2.15. Стрижень OA обертається довкола осі O у плоскості рисунка згідно із законом $\varphi = bt$; по стрижню рухається точка M за законом $OM = at$. Знайти траєкторію абсолютного руху точки M (рис. 2.20).

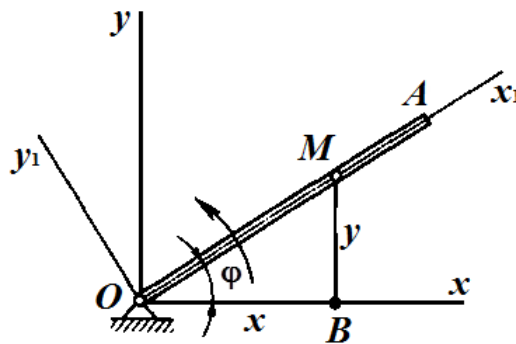


Рисунок 2.20

Розв'язок. Виберемо нерухому систему координат xOy і рухливу систему x_1Oy_1 , незмінно пов'язану із стрижнем OA . У такому разі переносним рухом буде обертання рухливих осей разом з уявно закріпленою на них у кожен момент точкою M довкола точки O , а відносним – рух точки M уздовж стрижня.

Рівняння переносного обертального руху запишеться так:

$$\varphi = bt .$$

Рівняння відносного руху матиме вигляд

$$x_1 = OM = at .$$

Визначимо рівняння абсолютного руху точки в координатній формі, для чого координати x і y в нерухомій системі відліку xOy виразимо як функції часу t .

З рисунку 2.20 маємо:

$$x = OB = OM \cos \varphi, \quad y = BM = OM \sin \varphi$$

або, підставляючи значення φ і OM , отримаємо:

$$x = at \cos bt, \quad y = at \sin bt .$$

Щоб визначити рівняння траєкторії абсолютного руху точки, виключимо з рівнянь руху час t , для чого розділимо друге рівняння на перше:

$$\frac{y}{x} = \frac{at \sin bt}{at \cos bt} = \operatorname{tg} bt,$$

звідки

$$t = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Крім того, звівши рівняння руху в квадрат і склавши їх, отримаємо

$$x^2 + y^2 = a^2 t^2; \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x}.$$

Таке рівняння траєкторії абсолютного руху точки M . Ця траєкторія є архимедовою спіраллю.

2.3.2 Теорема про складання швидкостей

Швидкість точки в абсолютному русі називається абсолютною. Швидкість точки у відносному русі називається відносною. Швидкість цієї точки, уявно закріпленої в цей момент на рухливій системі координат, називається переносний. Зв'язок між цими швидкостями встановлює теорема про складання швидкостей.

Теорема. Абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей.

Нехай за час Δt точка перейшла з положення A у положення A_3 , рухаючись по траєкторії абсолютного руху, тобто по дузі AA_3 (рис. 2.21). Якби спостерігався лише відносний рух, то точка перейшла б в положення A_1 ; якби тільки переносне, то точка перейшла б в положення A_2 . Можна уявити, що точка A перейшла в положення A_3 , рухаючись спочатку лише по траєкторії переносного руху (дуга AA_2), а потім лише по траєкторії відносного руху (дуга A_2A_3 , рівна дузі AA_1).

З'єднавши точки A , A_2 і A_3 хордами, отримаємо таку залежність між векторами переміщень точки A :

$$AA_3 = AA_2 + A_2A_3. \quad (2.124)$$

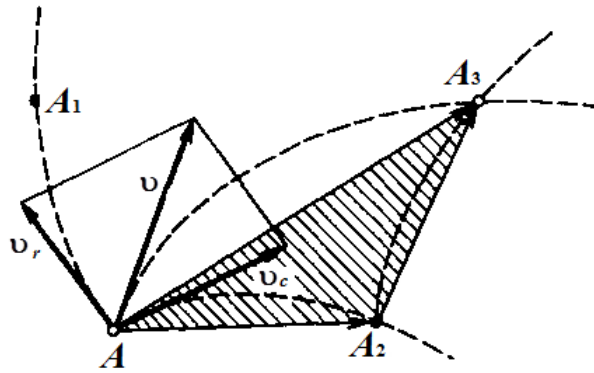


Рисунок 2.21

Розділимо всі члени рівності на Δt і перейдемо до межі за Δt , що прагне до нуля:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_2A_3}{\Delta t}, \quad (2.125)$$

що дає

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \quad (2.126)$$

де \mathbf{v} – вектор абсолютної швидкості;

\mathbf{v}_e – вектор переносної швидкості;

\mathbf{v}_r – вектор відносної швидкості.

Теорема доведена.

Приклад 2.16. Стрижень OA (рис. 2.22) обертається в плоскості креслення довкола нерухомої точки O згідно із законом $\varphi = t^2$. По стрижню рівноприскорено рухається повзун M , віддаляючись від точки O . Рух повзуна визначається рівнянням

$$s = OM = 2 + 2t^2$$

(s – у метрах, t – у секундах). Знайти абсолютну швидкість повзуна в момент $t = 1$ с.

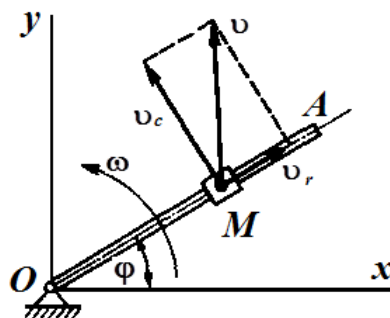


Рисунок 2.22

Розв'язок. Виберемо нерухому систему координат xOy ; рухливою системою вважатимемо стрижень. У такому разі відносним рухом є рух повзуна M по стрижню. Отже, відносна швидкість направлена уздовж стрижня і дорівнює

$$v_r = \frac{\partial s}{\partial t} = 4t.$$

У момент $t = 1$ с відносна швидкість буде за модулем дорівнювати $v_{r1} = 4$ м/с.

Переносним рухом є обертальний рух стрижня OA з уявно закріпленим на ньому в цей момент повзуном, тому переносна швидкість v_e повзуна направлена перпендикулярно стрижню, а її значення визначається за формулою:

$$v_e = \omega OM = \frac{\partial \varphi}{\partial t} OM.$$

Оскільки $OM = s = 2 + 2t^2$, а $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2t$, то

$$v_e = 2t(2 + 2t^2).$$

Вважаючи $t = 1$ с, отримаємо $v_e = 8$ м/с.

Оскільки відносна і переносна швидкості взаємно перпендикулярні, а на підставі теореми про складання швидкостей $v = v_r + v_e$, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}.$$

Підставляючи значення швидкостей за $t = 1$ с, отримаємо

$$v = \sqrt{v_{r1}^2 + v_{e1}^2} = \sqrt{4 + 8^2} = 8,94 \text{ м/с.}$$

2.4 Плоскопаралельний рух твердого тіла

2.4.1 Поняття про плоскопаралельний рух

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається такий рух, за якого всі точки тіла переміщаються в площині, паралельній якійсь одній площині, що називається основною.

З визначення плоскопаралельного руху виходить, що будь-яка пряма AB , проведена в тілі перпендикулярно основній площині, рухається поступально (рис. 2.23). Для визначення руху тіла на кожній прямій, перпендикулярній основній площині, потрібно знати рух лише однієї точки. Узявши ці точки в одній площині Q , паралельній основній, отримаємо перетин S , рух якого визначає рух тіла. Проте плоский рух перетину S сповна визначається рухом двох будь-яких його точок C і D або відрізком CD . Таким чином, питання про плоскопаралельний рух тіл зводиться до питання про рух відрізка прямої в площині, паралельній основній.

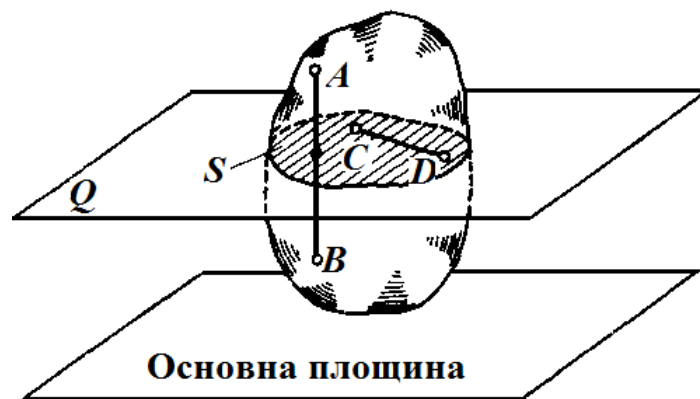


Рисунок 2.23

Плоскопаралельний рух вивчається двома методами:

- методом миттєвих центрів швидкостей;
- методом розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний.

2.4.2 Метод миттєвих центрів швидкостей

В основі цього методу лежить така теорема: всяке плоскопаралельне переміщення твердого тіла може бути отримано одним обертанням біля осі, перпендикулярної основній площині.

Нехай відрізок, що визначає плоскопаралельний рух тіла, за кінцевий проміжок часу перемістився з положення AB у положення A_1B_1 (рис. 2.24).

З'єднаємо точки A і A_1 , B і B_1 прямими лініями і з середин отриманих відрізків (точки M і N) побудуємо перпендикуляри до їхнього взаємного перетину в точці O . Цю точку з'єднаємо прямими лініями з кінцями відрізків AB і A_1B_1 і отримаємо два конгруентні (рівні) трикутники, що мають загальну вершину O :

$$\triangle AOB = \triangle A_1OB_1.$$

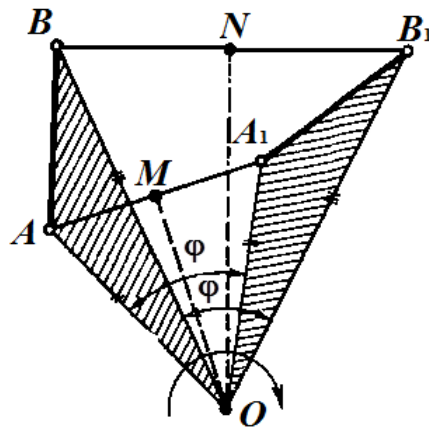


Рисунок 2.24

Трикутник AOB поєднується з трикутником A_1OB_1 шляхом повороту на кут φ довкола точки O , званою центром кінцевого повороту. Точка O є слід осі кінцевого повороту, перпендикулярній основній площині. Таким чином, відрізок AB , що визначає плоскопаралельний рух тіла, переміщається в будь-яке нове положення шляхом одного обертання довкола осі кінцевого повороту. Теорема доведена.

Наведений доказ буде справедливий і в тому випадку, якщо переміщення тіла станеться за нескінченно малий проміжок часу Δt . У межі за Δt , що прагне нуля, обертання відбуватиметься довкола миттєвої осі. Слід миттєвої осі обертання на площині фігури називають миттєвим центром швидкостей. Зрозуміло, що швидкість точки, що є в цей момент миттєвим центром швидкостей, дорівнює нулю. Кутова швидкість ω , з якою відбувається миттєве обертання, називається миттєвою кутовою швидкістю.

Точка нерухомої площини, що співпадає в цей момент часу з миттєвим центром швидкостей плоскої фігури, називається миттєвим центром обертання.

Якщо пряма AB рухається паралельно самій собі, то можна вважати, що тіло обертається довкола осі, видаленої в нескінченність, інакше кажучи, поступальну ходу можна розглядати як обертальну по колу нескінченно великого радіусу.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла може здійснюватися шляхом послідовних миттєвих безперервних поворотів довкола миттєвих осей обертання.

Методом миттєвих центрів швидкостей можна користуватися лише для визначення швидкостей точок плоскої фігури, але не для визначення траєкторій і прискорень цих точок.

2.4.3 Властивості миттєвого центра швидкостей

Встановимо такі три властивості миттєвого центру швидкостей, які витікають із закону розподілу швидкостей точок твердого тіла, що обертається довкола нерухомої осі:

- швидкість миттєвого центра дорівнює нулю;
- миттєвий центр лежить на перпендикулярі, налаштованому з точки до напрямку її швидкості;
- швидкість точки дорівнює твору миттєвої кутової швидкості на відстань точки від миттєвого центра швидкостей (рис. 2.25):

$$v_A = \omega OA. \quad (2.127)$$

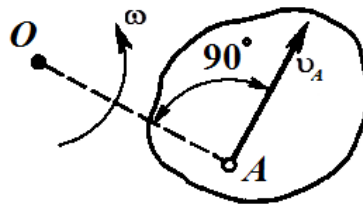


Рисунок 2.25

На підставі перелічених вище властивостей можна встановити такі п'ять способів визначення положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури, що визначає плоскопаралельний рух тіла.

1. Відомі миттєва кутова швидкість ω і швидкість v_A якоїсь точки A плоскої фігури (рис. 2.25).

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O знаходиться на перпендикулярі, налаштованому з точки A до вектора швидкості v_A на відстані $OA = \frac{v_A}{\omega}$.

2. Відомі напрямки швидкостей двох точок A і B плоскої фігури (рис. 2.26).

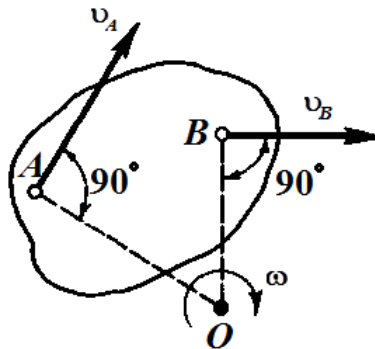


Рисунок 2.26

У цьому випадку миттєвий центр O лежить на перетині перпендикулярів, налаштованих з точок A і B до напрямків їхніх швидкостей, де

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega OA}{\omega OB} = \frac{OA}{OB}, \quad (2.128)$$

тобто швидкості точок плоскої фігури прямо пропорційні їхнім відстаням від миттєвого центра швидкостей.

3. Відомо, що швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні один одному, направлені в один бік, перпендикулярні відрізку AB і за модулем нерівні (рис. 2.27).

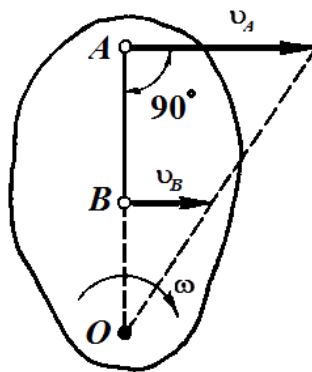


Рисунок 2.27

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O знаходиться в точці перетину прямої, що поєднує початки векторів v_A і v_B , з прямою, яка поєднує кінці цих векторів.

Якщо вектори швидкостей точок A і B рівні між собою, то миттєвий центр швидкостей в цей момент знаходиться в нескінченності, миттєва кутова швидкість дорівнює нулю, швидкості всіх точок плоскої фігури будуть однакові і рух буде миттєво поступальним.

4. Відомо, що швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні один одному, направлені в протилежні боки і перпендикулярні відрізку AB (рис. 2.28).

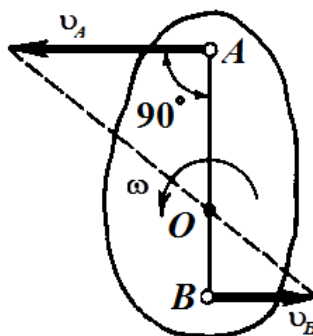


Рисунок 2.28

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O знаходиться в точці перетину відрізка AB з прямою, що поєднує кінці векторів v_A і v_B .

5. Відомо, що плоска фігура котиться без ковзання по нерухомій кривій.

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O знаходиться в точці зіткнення фігури з кривою, оскільки швидкість цієї точки фігури в цей момент дорівнює нулю.

На закінчення розглянемо кочення колеса по прямолінійній рейці в різних умовах тертя.

На рисунку 2.29 показані положення миттєвого центра швидкостей і графіки швидкостей точок вертикального діаметра у випадках тертя ковзання, тертя кочення, тертя кочення з прослизанням, часткового і повного буксування колеса.

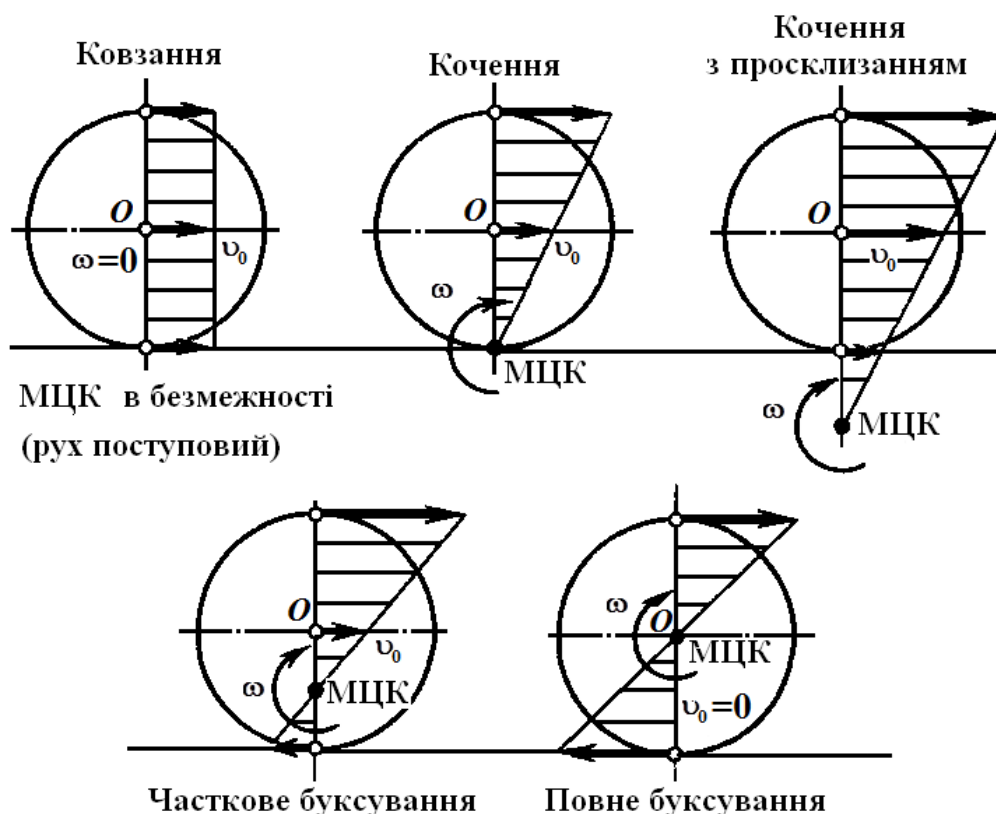


Рисунок 2.29

Приклад 2.17. Колесо радіуса R котиться без ковзання по прямолінійній рейці, а швидкість його центра O дорівнює $v_0 = 2$ м/с (рис. 2.30). Знайти швидкість кінців вертикального і горизонтального діаметрів колеса.

Розв'язок. За умовою колесо котиться без ковзання, тому швидкість точки D стосовно колеса з рейкою дорівнює нулю, отже, точка D – миттєвий центр швидкостей колеса.

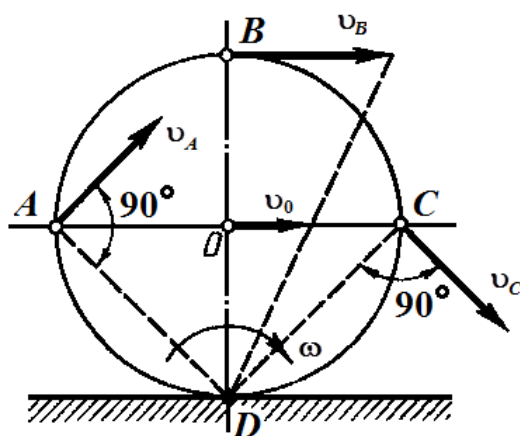


Рисунок 2.30

Знаючи швидкість точки O , знаходимо кутову швидкість ω колеса:

$$\omega = \frac{v_0}{OD} = \frac{v_0}{R}.$$

На підставі властивостей миттєвого центра швидкостей визначимо модулі швидкостей точок A , B і C колеса:

$$v_A = \omega \cdot AD = \frac{v_0}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с},$$

$$v_B = \omega \cdot BD = \frac{v_0}{R} 2R = 2 \times 2 = 4 \text{ м/с},$$

$$v_C = \omega \cdot CD = \frac{v_0}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с}.$$

Напрямки векторів швидкостей точок A , B і C перпендикулярні прямим, що з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей.

2.4.4 Розкладання плоскопаралельного руху на поступальний й обертальний

В основі цього методу лежить така теорема: всяке плоскопаралельне переміщення твердого тіла може бути отримане за допомогою одного поступального та одного обертального руху.

Нехай за час Δt відрізок AB , що визначає плоскопаралельний рух тіла, перемістився в положення A_1B_1 (рис. 2.31).

Передбачимо, що відрізок AB спочатку переміщався лише поступально, а всі його точки рухалися однаково, як точка A . Отже, відрізок перейшов

у положення A_1B_2 , після чого його можна перемістити в положення A_1B_1 за допомогою лише обертального руху довкола точки A_1 . Звідси видно, що складний плоскопаралельний рух складається з двох простих рухів: поступального і обертального, через це можна вважати, що ці рухи відбуваються одночасно.

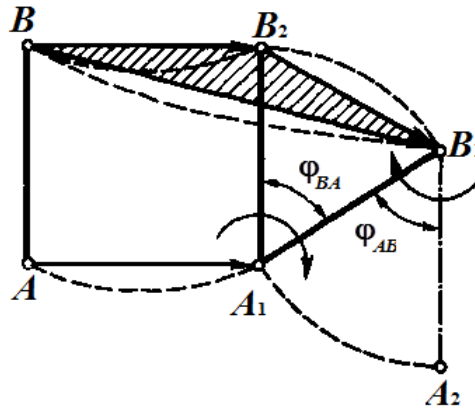


Рисунок 2.31

Встановимо залежність між векторами швидкостей точок A і B . Для цього з'єднаємо прямими точки A, A_1 і B, B_1, B_2 , внаслідок чого отримаємо таку залежність між векторами переміщень точки B :

$$BB_1 = BB_2 + B_2B_1. \quad (2.129)$$

Оскільки $BB_2 = AA_1$, то можна записати, що

$$BB_1 = AA_1 + B_2B_1. \quad (2.130)$$

Розділимо всі члени рівності на Δt і перейдемо до межі за Δt , що прагне нуля:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_2B_1}{\Delta t}, \quad (2.131)$$

що дає

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \quad (2.132)$$

де \mathbf{v}_B – вектор абсолютної швидкості точки B ;

\mathbf{v}_A – вектор абсолютної швидкості точки A ;

\mathbf{v}_{BA} – вектор швидкості точки B у відносному обертальному русі відрізка AB довкола точки A , направлений перпендикулярно відрізку AB .

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла може здійснювати за рахунок обертового і поступального рухів, що одночасно відбуваються; поступальний хід можна вважати переносним, а обертовий – відносним. Вектор абсолютної швидкості якоїсь точки B дорівнює вектору абсолютної швидкості будь-якої іншої точки A плюс вектор швидкості точки B у відносному обертовому русі відрізка AB довкола точки A .

Точку, довкола якої відбувається відносний обертовий рух, називатимемо полюсом.

Якщо за полюс замість точки A прийняти точку B , то, міркуючи аналогічно, отримаємо

$$v_A = v_B + v_{AB}. \quad (2.133)$$

Порівнюючи цю векторну рівність з попередньою, бачимо, що вектори відносних швидкостей v_{BA} і v_{AB} за модулем рівні між собою, тобто

$$v_{BA} = v_{AB}. \quad (2.134)$$

З рисунку 2.33 видно, що напрямок відносного обертання і кут повороту відрізка AB за якийсь проміжок часу не залежать від вибору полюса, тобто

$$\varphi_{BA} = \varphi_{AB}. \quad (2.135)$$

Продиференціювавши цю рівність за часом, отримаємо

$$\frac{\partial \varphi_{BA}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{AB}}{\partial t} \text{ або } \omega_{BA} = \omega_{AB}. \quad (2.136)$$

Отже, відносна кутова швидкість від вибору полюса не залежить. Аналогічно,

$$\frac{\partial \phi_{BA}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{AB}}{\partial t} \text{ або } \alpha_{BA} = \alpha_{AB}. \quad (2.137)$$

Отже, і відносне кутове прискорення від вибору полюса не залежить.

Із сказаного випливає, що при розкладанні плоскопаралельного руху на поступальний і обертовий поступальна частина руху в загальному випадку залежить від вибору полюса, а обертова частина руху від вибору полюса не залежить.

Оскільки за полюс може бути вибрана будь-яка точка площини, зокрема і миттєвий центр швидкостей, то при розкладанні плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний кутова швидкість відносного обертального руху завжди дорівнює абсолютній кутовій швидкості.

Якщо векторну рівність $v_A = v_B + v_{AB}$ спроектувати на напрямок прямої AB , то

$$\text{пр. } v_A = \text{пр. } v_B, \quad (2.138)$$

оскільки $v_{AB} = 0$. Отже, при плоскопаралельному русі проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на напрямок прямої, яка поєднує ці точки, рівні між собою.

Приклад 2.18. Кривошипний механізм зв'язаний шарнірно в середині C шатуна із стрижнем CD , а останній із стрижнем DE , який може обертатися довкола точки E . Визначити кутову швидкість ω_{DE} стрижня DE у вказаному на рисунку 2.32 положенні кривошипного механізму, якщо точки B і E розташовані на одній вертикалі; кутова швидкість ω кривошипа OA дорівнює 8 рад/с. $CA = 25$ см, $DE = 100$ см, кут $CDE = \pi/2$ і кут $BED = \pi/6$ рад.

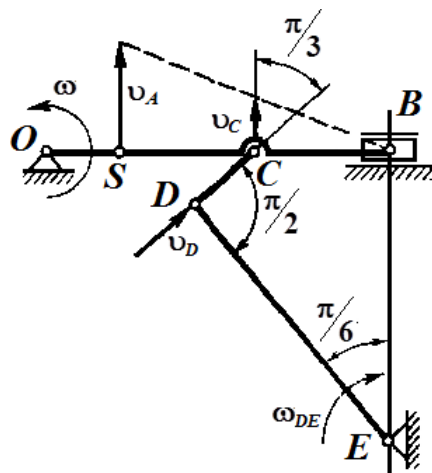


Рисунок 2.32

Розв'язок. Передусім визначимо швидкість точки A кривошипа OA :

$$v_A = \omega \cdot OA = 8 \times 25 \times 10^{-2} = 2 \text{ м/с.}$$

У заданому положенні механізму повзун B займає крайнє праве положення і його швидкість у цей момент дорівнює нулю. Отже, точка B у цей момент є миттєвим центром швидкостей шатуна AB . Оскільки швидкості

точок шатуна прямо пропорційні їхнім відстаням від миттєвого центра швидкостей, то запишемо пропорцію

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{CB}{AB},$$

з якої визначимо модуль швидкості точки C :

$$v_C = v_A \frac{CB}{AB} = 2 \times 0,5 = 1 \text{ м/с}.$$

Вектор швидкості v_C перпендикулярний шатуну AB вектор швидкості точки D перпендикулярний стрижню DE , тобто направлений уздовж стрижня DC .

Швидкість точки D визначимо, розклавши складний плоскопаралельний рух ланки DC на поступальний і обертальний за формулою:

$$v_D = v_C + v_{DC},$$

де вектор відносної швидкості v_{DC} перпендикулярний ланці DC . Спроектувавши цю векторну рівність на напрямок прямої DC , отримаємо

$$v_D = \frac{v_C \cos \pi}{3} = 1 \times 0,5 = 0,5 \text{ м/с}.$$

Виразив швидкість точки D через кутову швидкість стрижня DE , отримаємо

$$v_D = \omega_{DE} DE,$$

звідки, підставивши числові значення, знайдемо

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{DE} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ рад/с}.$$

Отже, кутова швидкість ω_{DE} стрижня DE дорівнює 0,5 рад/с.

3 ДИНАМІКА

3.1 Основи динаміки матеріальної точки

3.1.1 Аксиоми динаміки. Основне рівняння

Динаміка є частиною теоретичної механіки, що вивчає механічний рух тіл залежно від сил, що впливають на цей рух.

Динаміка ґрунтується на низці положень, які є аксіомами і називаються законами динаміки. Перш ніж перейти до розгляду цих законів, введемо нове для нас поняття ізольованої матеріальної точки, тобто точки, на яку не діють інші матеріальні точки. Насправді ізольовані тіла в природі не існують і поняття ізольованої матеріальної точки умовне.

Перший закон динаміки, званий аксіомою інерції або першим законом Ньютона, формулюється стосовно до матеріальної точки так: ізольована матеріальна точка або знаходиться у спокої, або рухається прямолінійно і рівномірно.

У кінематиці було встановлено, що прямолінійний рівномірний рух є єдиним видом руху, за якого прискорення дорівнює нулю, тому аксіому інерції можна сформулювати так: прискорення ізольованої матеріальної точки дорівнює нулю.

Отже, ізольована від впливу навколишніх тіл матеріальна точка не може сама собі повідомити прискорення. Це властивість тіл називається інерцією або інертністю.

Таким чином, інерція або інертність – це здатність тіла зберігати свою швидкість за модулем і напрямком незмінної (зокрема і швидкість, рівну нулю).

Змінити швидкість, тобто повідомити прискорення, може лише прикладена до тіла сила.

Залежність між силою і прискоренням, що повідомляється їй, встановлює другий закон динаміки, або другий закон Ньютона, який формулюється так: прискорення, що повідомляється матеріальній точці силою, має напрямок сили і пропорційно її модулю.

Якщо сила F_1 повідомляє матеріальній точці прискорення a_1 , а сила F_2 – прискорення a_2 , то на підставі другого закону можна записати

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} \text{ або } \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}. \quad (3.1)$$

Отже, для цієї матеріальної точки відношення сили до прискорення є величина постійна. Це відношення позначимо m і назовемо масою цієї матеріальної точки:

$$\frac{F}{a} = m = \text{const.} \quad (3.2)$$

Ця рівність означає, що дві матеріальні точки мають однакові маси, якщо від однієї і тієї саме сили вони отримують однакові прискорення; чим більше маса точки, тим більшу силу потрібно прикласти, щоб повідомити точці задане прискорення.

Маса – одна з основних характеристик будь-якого матеріального об'єкта, що визначає його інертні і гравітаційні властивості.

Теорія відносності встановлює таку залежність між масою тіла, що знаходиться у спокої і в русі:

$$m = \frac{m_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.3)$$

де m – маса рухомого тіла;

m_0 – маса спокою;

v – швидкість руху тіла;

c – швидкість світла.

З цієї формули видно, що чим більше швидкість руху тіла, тим більше його маса і, отже, тим важче повідомити йому подальше прискорення.

Другий закон Ньютона виражається рівністю

$$F = ma, \quad (3.4)$$

яке називається основним рівнянням динаміки і читається так: сила є вектор, рівний добутку маси на її прискорення.

Основне рівняння динаміки є рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі.

З досвіду відомо, що під дією тяжіння Землі в порожнечі тіла падають у конкретному місці з однаковим прискоренням, яке називається прискоренням вільного падіння. Сила тяжіння тіла дорівнює його масі, помноженій на прискорення вільного падіння. Якщо сила тяжіння одного тіла $G_1 = m_1 g$, а другого $G_2 = m_2 g$, то

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (3.5)$$

тобто сили тяжіння тіл пропорційні їхнім масам, що дозволяє порівнювати маси тіл шляхом їхнього зважування.

З другого закону Ньютона виходить, що під дією постійної сили вільна матеріальна точка, що знаходилася у спокої, рухається прямолінійно рівнозмінно.

Рух під дією постійної сили може бути і прямолінійним і криволінійним (в останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не збігається з лінією дії сили).

До основних законів динаміки належить відома із статки аксіома взаємодії, або третій закон Ньютона. Стосовно матеріальної точки закон формулюється так: сили взаємодії двох матеріальних точок за модулем рівні між собою і направлені в протилежні боки.

3.1.2 Принцип незалежності дії сил. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Принцип незалежності дії сил формулюється так: за одночасної дії на матеріальну точку декількох сил її прискорення дорівнює векторній сумі прискорень, яку ця точка отримала б від кожної сили окремо.

Нехай до матеріальної точки A прикладені сили F_1 і F_2 , рівнодійна яких дорівнює F . На підставі аксіоми паралелограма запишемо

$$F_1 + F_2 = F. \quad (3.6)$$

Розділимо обидві частини рівності на масу точки, отримаємо

$$\frac{F_1}{m} + \frac{F_2}{m} = \frac{F}{m}, \quad (3.7)$$

звідки

$$a_1 + a_2 = a. \quad (3.8)$$

Застосовуючи послідовно аксіому паралелограма, можна сказати, що за одночасної дії на матеріальну точку декількох сил її прискорення буде таким, неначебто діяла одна рівнодійна сила

$$F = \sum F_i. \quad (3.9)$$

Користуючись принципом незалежності дії сил, виведемо рівняння руху матеріальної точки в диференціальній формі.

Нехай матеріальна точка A масою m рухається в площині креслення під дією сили $F = \sum F_i$ з прискоренням a , тоді

$$F = ma. \quad (3.10)$$

Спроекуємо цю векторну рівність на дві взаємно перпендикулярні осі координат x і y (осі і вектор сили F лежать в одній площині) і отримаємо рівняння плоского руху матеріальної точки в координатній формі:

$$F_x = \sum X = ma_x, F_y = \sum Y = ma_y. \quad (3.11)$$

Застосовуючи теорему про проекцію прискорення на координатну вісь, можна ці рівняння записати у вигляді диференціальних рівнянь плоского руху матеріальної точки:

$$\sum X = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \sum Y = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3.12)$$

У цих рівняннях $\sum X$, $\sum Y$ – алгебраїчні суми проекцій сил, що діють на точку, на відповідні координатні осі; x і y – поточні координати точки.

За допомогою виведених рівнянь вирішуються дві основні задачі динаміки:

- по заданому руху точки визначити сили, що діють на неї;
- знаючи сили, що діють на точку, визначити її рух.

У тих випадках, коли під час розв'язання задач маємо справу із скованою матеріальною точкою, необхідно застосовувати принцип звільненості, тобто відкинути зв'язки і замінити їх реакціями, враховуючи останні в рівняннях руху нарівні з активними силами, що діють на точку.

Приклад 3.1. Рух тіла масою 0,5 кг виражається рівняннями

$$x = 2t, y = 3 + t - 5t^2,$$

де x і y – у сантиметрах, t – у секундах. Визначити силу, що діє на тіло.

Розв'язок. Цей приклад належить до першої задачі динаміки. Користуючись теоремою про проекцію прискорення на координатну вісь, визначимо проекції прискорення на осі x і y :

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0,$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -10 \text{ см/с}^2 = -0,1 \text{ м/с}^2.$$

Підставивши ці значення в рівняння руху матеріальної точки, отримаємо:

$$X = ma_x = 0,5 \times 0 = 0,$$

$$Y = ma_y = 0,5 \times (-0,1) = -0,05 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = -0,05 \text{ Н}.$$

По проекціях сили, що діє на тіло, видно, що вона паралельна осі ординат, направлена у бік негативних ординат і за модулем дорівнює

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = |Y| = 0,05 \text{ Н}.$$

Приклад 3.2. Кривошип OA довжиною l , обертаючись рівномірно з кутовою швидкістю ω , переміщає кулісу, що рухається поступально уздовж напрямних $I-I$ (рис. 3.1). Знайти, нехтуючи тертям, чому при цьому дорівнює сила тиску F каменя A на кулісу, якщо сила тяжіння її дорівнює G .

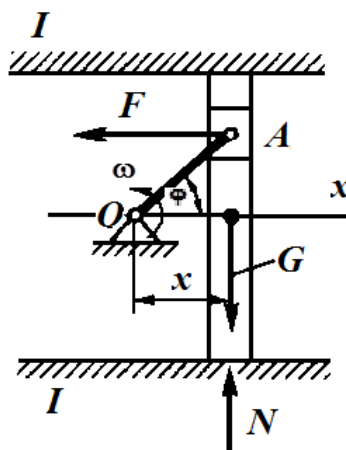


Рисунок 3.1

Розв'язок. Цей приклад належить до першої задачі динаміки.

Застосуємо принцип звільненості, відкинемо зв'язки куліси і замінимо їх реакціями. Реакція N перпендикулярна напрямним куліси, а сила тиску F перпендикулярна кулісі, оскільки за умовою тертям нехтуємо.

Куліса рухається зворотно-поступально, отже, всі її точки рухаються однаково. Складемо рівняння руху проекції точки A на вісь x , яке і буде кінематичним рівнянням руху куліси:

$$x = l \cos \phi = l \cos \omega t.$$

Застосувавши теорему про проекцію прискорення на координатну вісь, визначимо прискорення куліси

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -l\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Складемо рівняння руху куліси в координатній формі:

$$\sum X = ma_x.$$

Спроекувавши сили, що діють на кулісу, на вісь x і підставивши значення маси і прискорення, отримаємо

$$F_x = -F = -\frac{G}{g}\omega^2 x,$$

звідки

$$F = \frac{G}{g}\omega^2 x.$$

Отже, сила тиску повзуна на кулісу змінюється пропорційно відстані куліси від осі кривошипа.

Приклад 3.3. На матеріальну точку масою 4 кг, що лежить на гладкій горизонтальній площині, діє горизонтальна сила $F = 12$ Н. З якою швидкістю рухатиметься матеріальна точка через $t = 10$ с, якщо до додавання сили ця точка знаходилася у спокої?

Розв'язок. Цей приклад належить до другої задачі динаміки.

Оскільки дана матеріальна точка лежить на гладкій горизонтальній площині, то під дією горизонтальної постійної сили F точка рухатиметься прямолінійно рівноприскорено. Направивши вісь x уздовж траєкторії точки, запишемо рівняння руху:

$$\sum X = ma_x = ma.$$

Спроекувавши на вісь x сили, що діють на точку, і підставивши в це рівняння значення маси, визначимо прискорення

$$a = \sum \frac{X}{m} = \frac{F}{m} = \frac{12}{4} = 3 \text{ м/с}^2.$$

Застосуємо формулу швидкості рівноприскореного руху

$$v = v_0 + at.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$v = at = 3 \times 10 = 30 \text{ м/с.}$$

Приклад 3.4. У результаті отриманого поштовху тіло почало ковзати з початковою швидкістю $v_0 = 2 \text{ м/с}$ по нерухомій стрічці конвеєра, розташованого під кутом $\alpha = \pi/6$ рад до горизонту. Визначити переміщення s тіла за проміжок часу $t = 2 \text{ с}$, якщо коефіцієнт тертя ковзання цеглини об стрічку конвеєра $f = 0,4$; тіло вважати точковою масою (рис. 3.2).

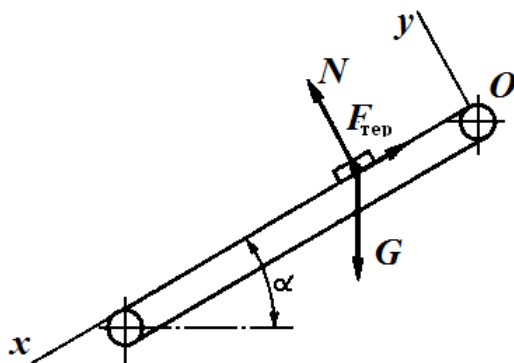


Рисунок 3.2

Розв'язок. Цей приклад належить до другої задачі динаміки. Виберемо систему координат xOy так, щоб початок координат був у початковому положенні тіла, вісь x була направлена уздовж стрічки конвеєра вниз, а вісь y перпендикулярно стрічці конвеєра вгору. Застосувавши принцип звільненості, розглянемо тіло як матеріальну точку, рухому уздовж осі x під дією сили тяжіння G , нормальній реакції N і сили тертя $F_{\text{тер}}$.

Складемо рівняння руху матеріальної точки:

$$\sum X = ma_x; G \sin \alpha - F_{\text{тер}} = \frac{G}{g} a_x, \quad (3.13)$$

$$\sum Y = ma_y; N - G \cos \alpha = \frac{G}{g} a_y. \quad (3.14)$$

Крім того, на підставі другого закону тертя ковзання можна записати

$$F_{\text{тер}} = fN. \quad (3.15)$$

Оскільки матеріальна точка рухається уздовж осі x , то $a_y = 0$, внаслідок чого з рівняння (3.14) маємо

$$N = G \cos \alpha.$$

Підставивши цей вираз в рівняння (3.8), отримаємо

$$F_{\text{тер}} = fG \cos \alpha.$$

Отриманий вираз підставимо в рівняння (3.6):

$$G \sin \alpha - fG \cos \alpha = \frac{G}{g} a_x.$$

Скорочуючи цю рівність на G і враховуючи, що $a_x = a$, визначимо прискорення тіла:

$$a = g \sin \alpha - gf \cos \alpha,$$

або, винісши $g \cos \alpha$ за дужки, отримаємо

$$a = g \cos \alpha (tg \alpha - f).$$

Оскільки права частина цієї рівності містить лише постійні величини, то прискорення тіла – величина постійна, крім того можливі три випадки руху:

- якщо $tg \alpha > f$, то $a > 0$ і рух буде рівноприскореним;
- якщо $tg \alpha = f$, то $a = 0$ і рух буде рівномірним;
- якщо $tg \alpha < f$ то $a < 0$ і рух буде рівноуповільненим.

Прийнявши формулу шляху рівнозмінного руху, визначимо шлях s , пройдений тілом за 2 с:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = v_0 t + g \cos \alpha \frac{(tg \alpha - f)t^2}{2} = 2 \cdot 2 + 9,81 \cdot 0,866 \frac{(0,577 - 0,4)}{2} \approx 7 \text{ м.}$$

Зважаючи на задані в прикладі умови $\operatorname{tg} \alpha > f$, тобто $a > 0$, отже, рух цеглини був рівноприскореним.

3.1.3 Рух матеріальної точки, кинутої під кутом до горизонту

Розглянемо матеріальну точку M масою m , кинуту з точки O поверхні Землі з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту (рис. 3.3).

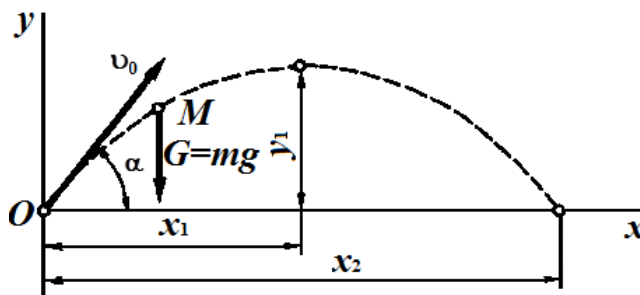


Рисунок 3.3

Визначимо рух точки M , вважаючи, що на неї діє лише сила тяжіння G (опором повітря нехтуємо). Візьмемо початок координат у точці O , вісь x направимо по горизонталі праворуч, а вісь y – по вертикалі вгору. Складемо диференціальні рівняння руху точки:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -mg. \quad (3.16)$$

Скорочуючи рівність на m , отримуємо:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g. \quad (3.18)$$

Інтегруючи рівняння (3.17), знаходимо

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C_1. \quad (3.19)$$

Згідно з теоремою про проекцію швидкості на координатну вісь

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = C_1. \quad (3.20)$$

Отже, проекція швидкості точки M на вісь x увесь час залишається величиною постійною, що дорівнює

$$v_x = v_0 \cos \alpha . \quad (3.21)$$

З останніх двох рівностей маємо

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_0 \cos \alpha . \quad (3.22)$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_2 . \quad (3.23)$$

За умовою, якщо $t = 0$ $x = 0$, довільна постійна $C_2 = 0$. Остаточно

$$x = v_0 t \cos \alpha . \quad (3.24)$$

Інтегруючи рівняння (1.125), знаходимо

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -gt + C_3 . \quad (3.25)$$

Підставивши в це рівняння значення $t = 0$, знайдемо довільну постійну

$$C_3 = v_y = v_0 \sin \alpha . \quad (3.26)$$

Отже,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v_0 \sin \alpha - gt . \quad (3.27)$$

Інтегруючи ще раз, отримуємо

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + C_4 . \quad (3.28)$$

За умовою, якщо $t = 0$ та $y = 0$, довільна постійна $C_4 = 0$. Остаточно

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} . \quad (3.29)$$

Таким чином, матеріальна точка M , кинута з швидкістю v_0 під кутом ω до горизонту, рухається згідно з рівняннями

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Для визначення траєкторії точки M виключаємо з отриманих рівнянь руху час. Визначимо час з першого рівняння руху

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (3.31)$$

і підставимо його вираз в друге рівняння, внаслідок чого отримаємо рівняння траєкторії

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3.32)$$

Траєкторія точки M є параболою з вертикальною віссю симетрії.

Визначимо час польоту точки M , для чого в друге рівняння руху підставимо значення $y = 0$. Тоді це рівняння набере вигляду

$$v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0. \quad (3.33)$$

Звідси знаходимо два значення часу, за яких ордината дорівнює нулю:

$$t_0 = 0, t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3.34)$$

Перше значення часу відповідає початку польоту, друге – його кінцю. Тривалість польоту

$$t_2 - t_0 = t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3.35)$$

Визначимо дальність польоту, для чого в перше рівняння руху підставимо значення часу t_2 :

$$x_2 = v_0 t_2 \cos \alpha = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (3.36)$$

або

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (3.37)$$

З цього рівняння видно, що максимальна дальність польоту x_{\max} спостерігається за $\sin 2\alpha = 1$, тобто за $\alpha = \pi/4$ рад:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3.38)$$

Визначимо найбільшу висоту підйому точки M , тобто в той момент, коли проекція її швидкості на вісь ординат дорівнюватиме нулю:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0. \quad (3.39)$$

З рівності визначимо t_1 :

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{t_2}{2}. \quad (3.40)$$

Отже, найбільший підйом точки спостерігається в середині шляху польоту, тобто за

$$x_1 = \frac{x_2}{2}. \quad (3.41)$$

Підставивши значення t_1 у друге рівняння руху, отримаємо

$$y_1 = \frac{v_0 \sin \alpha v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2}, \quad (3.42)$$

звідки

$$y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (3.43)$$

З цього рівняння видно, що максимальної висоти точка досягає за $\sin\alpha = 1$ або за $\alpha = \pi/2$ рад, тобто коли точка кинута вертикально вгору:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (3.44)$$

Приклад 3.5. Під час аварії обід маховика парової машини розірвався на декілька частин, які відлетіли від місця аварії на різні відстані, залишаючись у площині обертання маховика. Найбільша відстань, на яку відлетіли знайдені шматки, виявилася рівною 280 м. Діаметр маховика $D = 3,5$ м. Визначити кутову швидкість маховика у момент розриву.

Розв'язок. Під час розгляду питання про рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, була отримана формула, що визначає максимальну дальність польоту:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Із цієї формули визначимо окружну швидкість маховика у момент розриву:

$$v_0 = \sqrt{gx_{\max}} = \sqrt{9,8 \times 280} = 52,4 \text{ м/с}.$$

При діаметрі маховика $D=3,5$ м його кутова швидкість у момент розриву дорівнювала

$$\omega = \frac{v_0}{0,5D} = \frac{52,4}{1,75} \approx 30 \text{ рад/с}.$$

Варто зауважити, що насправді кутова швидкість маховика у момент розриву була дещо більша, тому що в розрахунках опором повітря нехтували.

3.2 Основи кінетостатики

3.2.1 Метод кінетостатики

Уявимо собі матеріальну точку масою m , що рухається з прискоренням a під дією якоїсь системи активних і реактивних сил, рівнодійна яких дорівнює F .

Скористаємося однією з відомих нам формул (основним рівнянням динаміки) для того, щоб рівняння руху записати у формі рівнянь рівноваги (метод кінетостатики):

$$F = ma. \quad (3.45)$$

Перепишемо це рівняння в такому вигляді:

$$F + (-ma) = 0. \quad (3.46)$$

Вираз, що стоїть у дужках, позначається $F^{\text{Ін}}$ і називається силою інерції:

$$F^{\text{Ін}} = -ma. \quad (3.47)$$

Сила інерції є вектор, що дорівнює добутку маси точки на її прискорення і направлений у бік, протилежний до прискорення. Тоді

$$F + F^{\text{Ін}} = 0 \text{ або } \Sigma(F, F^{\text{Ін}}) = 0. \quad (3.48)$$

Цю рівність, що є математичним виразом принципу, який носить ім'я французького вченого Даламбера, можна розглядати як рівняння рівноваги матеріальної точки. Варто підкреслити, що отримана рівність, хоча і названа рівнянням рівноваги, насправді є видозміненим рівнянням руху матеріальної точки.

Принцип Даламбера формулюється так: активні і реактивні сили, що діють на матеріальну точку, разом із силами інерції утворюють систему взаємно урівноважених сил, що задовольняє всім умовам рівноваги.

Необхідно пам'ятати, що сила інерції прикладена до певної матеріальної точки умовно, але для зв'язку, що викликає прискорення, вона в певному значенні є реальною. Володіючи властивістю інерції, всяке тіло прагне зберігати свою швидкість за модулем і напрямком незмінною, унаслідок чого воно діятиме на зв'язок, що викликає прискорення, з силою, рівною силі інерції. Як приклад дії сил інерції можна навести випадки руйнування маховиків ц разі досягнення ними критичної кутової швидкості. У всякому тілі, що обертається, діють сили інерції, оскільки кожна частка цього тіла має прискорення, а сусідні частки є для неї зв'язками.

Пояснимо це на прикладі (рис. 3.4). Нехай до тіла, що лежить на горизонтальній площині, прив'язана нитка, здатна витримувати силу тяжіння G цього тіла. Якщо до нитки прикласти силу R статично (поступово), то тіло буде піднято вгору і нитка не обірветься; якщо силу R прикласти динамічно (раптову, ривком), то нитка обірветься. Це явище пояснюється у такий спосіб.

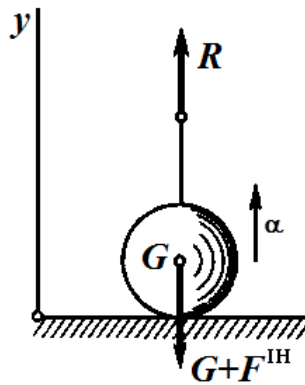


Рисунок 3.4

Щоб підняти вантаж, потрібно повідомити йому якесь прискорення a . Для визначення величини натягнення нитки застосуємо принцип Даламбера і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0; R - G - F^{\text{In}} = 0, \quad (3.49)$$

звідки

$$R = G + F^{\text{In}} = G + ma. \quad (3.50)$$

У першому випадку вантажу повідомляється невелике прискорення і сила інерції, що збільшує натягнення нитки, невелика; у другому випадку прискорення, що повідомляється тілу, значне і сила інерції відповідно зростає. У обох випадках сила інерції не збільшує тиск на опору, оскільки прикладена до тіла умовно.

Відзначимо, що вагою тіла називається сила, з якою тіло унаслідок тяжіння Землі діє на опору (або підвіс), що утримує його від вільного падіння. Якщо тіло та опора нерухомі, то вага тіла дорівнює його силі тяжіння.

Приклад 3.6. У кабіні підйомно-транспортного пристрою, що піднімається, зважується тіло на пружинних вагах (сила тяжіння тіла $G = 50$ Н), натягнення R пружини важелів (тобто вага тіла) дорівнює 51 Н. Знайти прискорення кабінки.

Розв'язок. Застосуємо до тіла принцип звільненості, відкинемо пружинні ваги і замінимо їх реакцією R , рівною натягненню пружини.

Для розв'язання задачі застосуємо метод кінетостатики, тобто прикладемо до тіла силу інерції F^{In} . Складемо рівняння рівноваги зважуваного тіла, спроектувавши всі сили на вертикальну вісь y ; передбачаємо, що прискорення a кабінки направлено вгору і, отже, сила інерції направлена вниз (розташування векторів сил наведено на рис. 3.4):

$$\sum Y = 0; R - G - F^{\text{In}} = 0.$$

Модуль сили інерції визначуваний за формулою:

$$F^{\text{ін}} = ma = \frac{G}{g} a.$$

Підставивши цей вираз у рівняння, визначимо прискорення

$$a = \frac{(R - G)g}{G} = \frac{(51 - 50) \times 9,8}{50} = 0,196 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення вийшло позитивним, отже, як і передбачалося, воно направлене вгору.

3.2.2 Сили інерції в криволінійному русі

У криволінійному русі точки повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень (рис. 3.5).

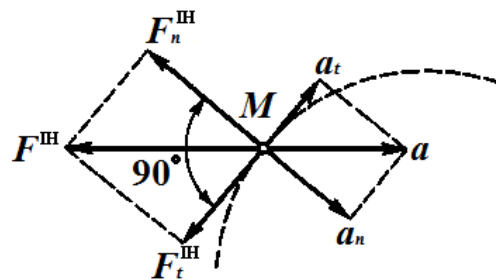


Рисунок 3.5

Дотичне прискорення $a_t = \frac{\partial v}{\partial t}$, нормальне прискорення $a_n = \frac{v^2}{\rho}$,

повне прискорення $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Кожному прискоренню відповідає своя сила інерції:

$$F_n^{\text{ін}} = m \frac{\partial v}{\partial t} \text{ — дотична, або тангенціальна;}$$

$$F_n^{\text{ін}} = \frac{mv^2}{\rho} \text{ — нормальна, або відцентрова;}$$

$$F_n^{\text{ін}} = ma \text{ — повна.}$$

Як приклад розглянемо рівномірний рух по колу, яке лежить у горизонтальній площині, тіла силою тяжіння G , прив'язаного до невагомої нитки завдовжки r , розташованою в тій самій площині (рис. 3.6, а). Щоб нитка залишалася в площині руху тіла, передбачається, що воно ковзає

по ідеальній гладкій горизонтальній площині. Швидкість тіла позначимо v . Тоді

$F_n^{\text{ін}} = \frac{mv^2}{r}$ – відцентрова сила інерції (ця сила натягує нитку);

$R = \frac{mv^2}{r}$ – доцентрова сила, прикладена до тіла (ця сила утримує тіло на колі).

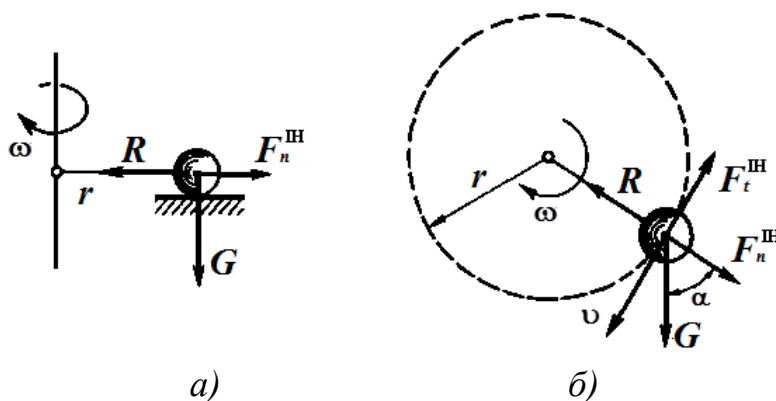


Рисунок 3.6

Відцентрова і доцентрова сили (дія і протидія) по третьому закону Ньютона рівні за модулем і направлені в протилежні боки. Очевидно, що дотична сила інерції $F_t^{\text{ін}}$ у цьому випадку дорівнює нулю, оскільки $v = \text{const}$.

Із досвіду відомо, що за достатньої швидкості нитка може розірватися і камінь полетить по дотичній до кола, тобто за напрямком швидкості, що є у момент розриву. Це доводить, що відцентрова сила інерції є реальна сила для зв'язку, але до тіла вона прикладена умовно.

Усередині тіл, рухомих із прискоренням, також виникають внутрішні сили інерції, оскільки для кожної частки тіла сусідні частки є зв'язками.

Знайдемо, чому дорівнює натягнення нитки, якщо камінь рухається по колу, лежачому у вертикальній площині (рис. 3.6, б). Для визначення натягнення R нитки застосуємо принцип Даламбера, тобто прикладемо до каменя нормальну силу інерції $F_n^{\text{ін}}$ і дотичну силу інерції $F_t^{\text{ін}}$.

Спроекуємо всі сили на напрямок нитки, внаслідок чого отримаємо

$$R - G \cos \alpha - F_n^{\text{ін}} = 0, \quad (3.51)$$

звідки

$$R = F_n^{\text{ін}} + G \cos \alpha = \frac{mv^2}{r} + G \cos \alpha. \quad (3.52)$$

Натягнення нитки максимальне за $\alpha = 0$, тобто коли камінь знаходиться в нижньому положенні:

$$R_{\max} = \frac{mv^2}{r} + G. \quad (3.53)$$

Натягнення нитки мінімальне за $\alpha = \pi$ рад, тобто коли камінь у верхньому положенні:

$$R_{\min} = \frac{mv^2}{r} - G. \quad (3.54)$$

Під впливом сили тяжіння каменя модуль його швидкості v змінюватиметься і досягатиме найменшого значення у верхньому положенні та найбільшого – у нижньому.

Якщо виразити лінійну швидкість каменя через кутову швидкість нитки

$$v = \omega r, \quad (3.55)$$

то формула відцентрової сили інерції набере вигляду

$$F_n^{\text{ін}} = m\omega^2 r. \quad (3.56)$$

Приклад 3.7. Вантаж $G = 10$ Н, підвішений на нитці завдовжки $l = 0,3$ м у нерухомій точці O , є конічним маятником, тобто описує коло в горизонтальній площині, а нитка складає з вертикаллю кут 60° (рис. 3.7). Визначити швидкість v вантажу і натягнення R нитки.

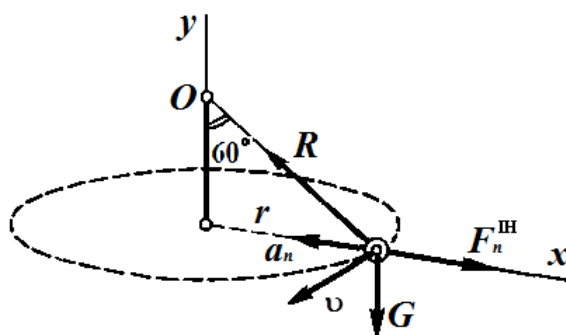


Рисунок 3.7

Розв'язок. Оскільки нитка складає з вертикаллю постійний кут, то швидкість вантажу постійна, дотичне прискорення вантажу і дотична сила інерції дорівнюють нулю. Застосуємо принцип Даламбера, тобто прикладемо

до вантажу відцентрову силу інерції $F_n^{\text{ін}}$, реакцію R нитки і складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; R \sin 60^\circ + F_t^{\text{ін}} = 0;$$

$$\sum Y = 0; R \cos 60^\circ - G = 0,$$

де

$$F_t^{\text{ін}} = ma_n = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} + \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{l \sin 60^\circ}.$$

З другого рівняння визначимо

$$R = \frac{G}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ Г } 10 \text{ Н}$$

і підставимо в перше рівняння

$$-\frac{G}{\cos 60^\circ} \sin 60^\circ + \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{l \sin 60^\circ} = 0;$$

звідси

$$v^2 = -gl \frac{\sin^2 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 9,8 \times 0,3 \times \frac{0,866^2}{0,5}; v = 2,1 \text{ м/с}.$$

3.3 Робота і потужність

3.3.1 Робота постійної сили на прямолінійній ділянці шляху

Розглянемо матеріальну точку M , до якої прикладена серед інших сила F . Нехай точка перемістилася прямолінійно з положення M_0 у положення M_1 , пройшовши шлях s (рис. 3.8).

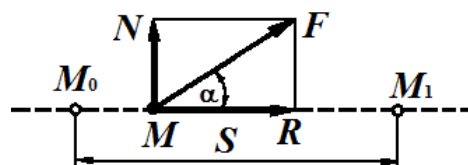


Рисунок 3.8

Щоб встановити кількісну міру дії сили F на шляху s , розкладемо цю силу на складові N і R , направлені відповідно перпендикулярно напрямку переміщення і вздовж нього. Оскільки складова N не може рухати точку або чинити опір її руху в напрямку s , то дію сили F на шляху s можна визначити добутком Rs . Ця нова величина називається роботою і позначається W . Отже,

$$W = Rs = Fs \cos \alpha, \quad (3.57)$$

тобто робота сили дорівнює добутку її модуля на шлях і на косинус кута між напрямком сили і напрямком переміщення.

Таким чином, робота є мірою дії сили, прикладеної до матеріальної точки за деякого її переміщення.

Робота – величина скалярна. Розглянемо три окремі випадки обчислення роботи:

- $\alpha = 0$, у цьому випадку $W = Fs$;
- $\alpha = 90^\circ$, у цьому випадку $W = 0$;
- $\alpha = 180^\circ$, у цьому випадку $W = -Fs$.

Отже, робота позитивна, якщо напрямок сили і напрямок переміщення збігаються (або $\alpha < 90^\circ$); робота негативна, якщо напрямок сили і напрямок переміщення протилежні (або $\alpha > 90^\circ$); робота дорівнює нулю, коли напрямок сили і напрямок переміщення взаємно перпендикулярні. Наприклад, під час підйому тіла вгору робота сили тяжіння негативна, під час руху вниз – позитивна, а при русі по горизонтальній площині робота сили тяжіння дорівнює нулю.

Сили, що здійснюють позитивну роботу, називаються рушійними силами, сили, що здійснюють негативну роботу, – силами опору.

Одиниця роботи

$$[W] = [F][s] = \text{сила} \cdot \text{довжина} = \text{н'ютон} \cdot \text{метр} = \text{джоуль (Дж)}.$$

3.3.2 Робота змінної сили на криволінійній ділянці шляху

На нескінченно малій ділянці ∂s криволінійний шлях можна вважати прямолінійним, а силу – постійною. Тоді елементарна робота ∂W на шляху ∂s дорівнює

$$\partial W = F \partial s \cos(F, v). \quad (3.58)$$

Робота на кінцевому переміщенні дорівнює сумі елементарних робіт:

$$W = \int_0^s F \cos(F, \upsilon) ds. \quad (3.59)$$

Побудуємо графік, що виражає залежність між $F \cos(F, \upsilon)$ і пройденою відстанню s (рис. 3.9, а).

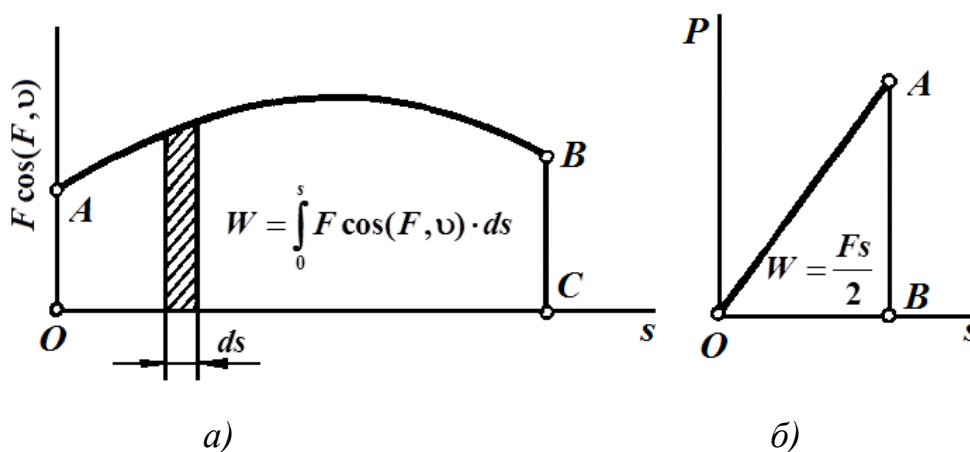


Рисунок 3.9

Площа заштрихованої смужки, яку можна прийняти за прямокутник, дорівнює елементарній роботі на шляху ds :

$$\partial W = F \cos(F, \upsilon) \partial s, \quad (3.60)$$

а робота сили F на кінцевому шляху s графічно виражається площею фігури $OABC$, обмеженою віссю абсцис, двома ординатами і кривою AB , яка називається кривою сил.

Якщо сила збігається з напрямком переміщення і зростає від нуля пропорційно шляху, то робота графічно виражається площею трикутника OAB (рис. 3.9, б) і дорівнює половині добутку сили на шлях:

$$W = \frac{Fs}{2}. \quad (3.61)$$

3.3.3 Теорема про роботу рівнодійної

Теорема. Робота рівнодійної сили на якійсь ділянці шляху дорівнює алгебраїчній сумі сил складових на тій саме ділянці шляху.

Нехай до матеріальної точки M прикладена система сил $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n)$, рівнодійна яких дорівнює F_Σ (рис. 3.10).

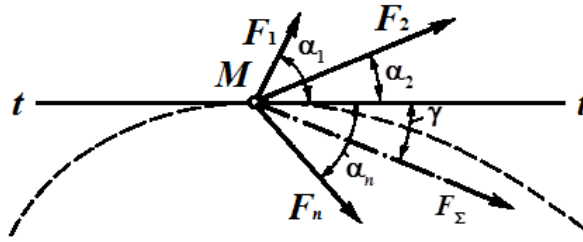


Рисунок 3.10

Система сил, прикладених до матеріальної точки, є системою сил, що сходяться, отже,

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n. \quad (3.62)$$

Спроектуємо цю векторну рівність на дотичну до траєкторії, тоді

$$F_{\Sigma} \cos \gamma = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 + \dots + F_n \cos \alpha_n. \quad (3.63)$$

Помножимо обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення ∂s і проінтегруємо цю рівність у межах якогось кінцевого переміщення s :

$$\int_0^s F_{\Sigma} \cos \gamma \partial s = \int_0^s F_1 \cos \alpha_1 \partial s + \int_0^s F_2 \cos \alpha_2 \partial s + \dots + \int_0^s F_n \cos \alpha_n \partial s. \quad (3.64)$$

що дає рівність

$$W_{\Sigma} = W_{F_1} + W_{F_2} + \dots + W_{F_n}, \quad (3.65)$$

або скорочено

$$W_{\Sigma} = \sum W_{F_i}. \quad (3.66)$$

Теорема доведена.

Приклад 3.8. Обчислити роботу, яка виконується під час рівномірного підйому вантажу $G = 200$ Н по похилій площині на відстань $s = 6$ м, якщо кут, що утворюється площиною з горизонтом, $\alpha = 30^\circ$, а коефіцієнт тертя ковзання дорівнює $f = 0,01$ (рис. 3.11).

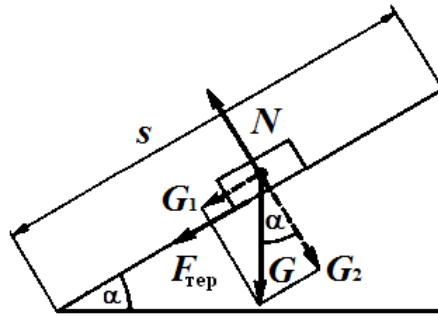


Рисунок 3.11

Розв'язок. Розкладемо силу тяжіння G вантажу на дві взаємно перпендикулярні складові G_1 і G_2 – відповідно паралельну і перпендикулярну похилій площині. Згідно з другим законом тертя ковзання, сила тертя $F_{\text{тер}}$ дорівнює

$$F_{\text{тер}} = fG_2 = fG \cos \alpha.$$

Застосувавши теорему про роботу рівнодійної, обчислимо шукану роботу як суму робіт сил опору (робота сили G_2 і нормальній реакції N дорівнює нулю, оскільки ці сили перпендикулярні напрямку переміщення s):

$$W_{\Sigma} = G_1 s + F_{\text{тер}} s = G s \sin \alpha + fG s \cos \alpha.$$

Підставивши числові значення, отримаємо

$$W_{\Sigma} = 200 \times 6 \times 0,5 + 0,01 \times 200 \times 6 \times 0,866 = 610,4 \text{ Дж.}$$

3.3.4 Теорема про роботу сили тяжіння

Теорема. Робота сили тяжіння не залежить від вигляду траєкторії і дорівнює добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її застосування.

Нехай матеріальна точка M рухається під дією однієї лише сили тяжіння G і за якийсь проміжок часу переміщається з положення M_1 у положення M_2 , пройшовши шлях s (рис. 3.12).

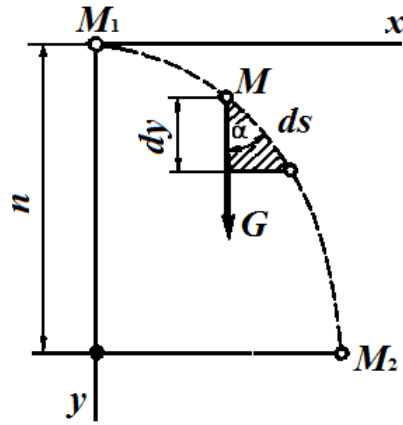


Рисунок 3.12

На траєкторії точки M виділимо нескінченно малу ділянку ∂s , яку вважаємо прямолінійною, і з її кінців проведемо прямі, паралельні осям координат, одна з яких вертикальна, а інша горизонтальна. Із заштрихованого трикутника отримаємо, що

$$\partial y = \partial s \cos \alpha. \quad (3.67)$$

Елементарна робота сили G на шляху ∂s дорівнює

$$\partial W = G \partial s \cos \alpha. \quad (3.68)$$

Повна робота на шляху s дорівнює

$$W = \int_0^s G \partial s \cos \alpha = \int_0^h G \partial y = G \int_0^h \partial y = Gh. \quad (3.69)$$

Отже,

$$W = Gh, \quad (3.70)$$

теорема доведена.

Сили, робота яких не залежить від вигляду траєкторії, називаються потенційними. До таких сил належать, наприклад, сила тяжіння.

Приклад 3.9. Однорідний масив $ABCD$ масою $m = 4\,080$ кг має розміри, вказані на рисунку 3.13. Визначити роботу, яку необхідно витратити на перекидання масиву довкола ребра D .

Розв'язок. Визначимо силу тяжіння G масиву:

$$G = mg = 4\,080 \times 9,81 = 40 \times 10^3 \text{ Н} = 40 \text{ кН}.$$

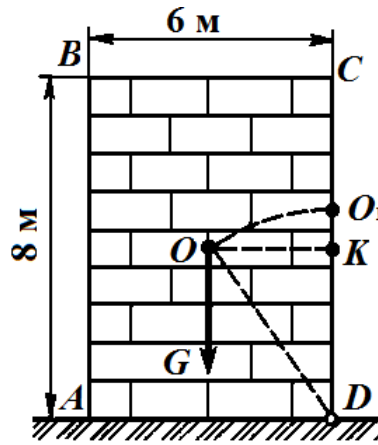


Рисунок 3.13

Робота, яку необхідно витратити на перекидання масиву, дорівнює роботі сили опору, тобто сили тяжіння. Для того щоб перевернути масив, необхідно його центр тяжіння O (що знаходиться в геометричному центрі, оскільки масив однорідний) перевести в положення O_1 , після чого масив продовжить перевертатися під дією сили тяжіння, яке перетвориться з сили опору в рушійну силу.

Шукану роботу визначимо, застосувавши теорему про роботу сили тяжіння:

$$\begin{aligned}
 W &= GKO_1 = G(OD - KD) = G\left(\sqrt{OK^2 + KD^2} - KD\right) = \\
 &= 40 \times 10^3 \left(\sqrt{3^2 + 4^2} - 4\right) = 40 \times 10^3 \text{ Дж} = 40 \text{ кДж}.
 \end{aligned}$$

3.3.5 Робота постійної сили, прикладеної до тіла, що обертається

Уявимо собі диск, що обертається довкола нерухомої осі під дією постійної сили F (рис. 3.14), точка прикладення якої переміщається разом із диском. Розкладемо силу F на три взаємно перпендикулярні складові: F_1 – окружне зусилля, F_2 – осьове зусилля, F_3 – радіальне зусилля. Під час повороту диска на нескінченно малий кут $\partial\phi$ сила F зробить елементарну роботу, яка на підставі теореми про роботу рівнодійної дорівнюватиме сумі робіт складових. Робота складових F_2 і F_3 дорівнює нулю, оскільки вектори цих сил перпендикулярні нескінченно малому переміщенню ∂s точки прикладання M , тому елементарна робота сили F дорівнює роботі складової F_1 :

$$\partial W = F_1 \partial s = F_1 R \partial \phi. \quad (3.71)$$

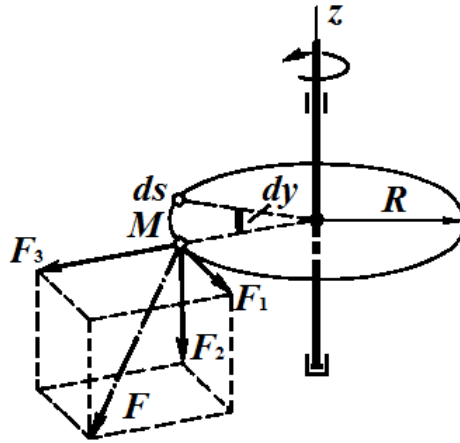


Рисунок 3.14

Під час повороту диска на кінцевий кут φ робота сили F дорівнює

$$W = \int_0^{\varphi} F_1 R d\varphi = F_1 R \int_0^{\varphi} d\varphi = F_1 R \varphi, \quad (3.72)$$

де кут φ виражається в радіанах.

Оскільки моменти складових F_2 і F_3 відносно осі z дорівнюють нулю, то на підставі теореми Варіньона момент сили F відносно осі z дорівнює

$$M_z(F) = F_1 R. \quad (3.73)$$

Момент сили, прикладеної до диска відносно осі обертання, називається обертальним моментом і позначається T :

$$T = M_z(F), \quad (3.74)$$

отже,

$$W = T \varphi. \quad (3.75)$$

Робота постійної сили, прикладеної до тіла, що обертається, дорівнює добутку обертального моменту на кутове переміщення.

Приклад 3.10. Робітник обертає рукоятку лебідки з силою $F = 200$ Н, перпендикулярною радіусу обертання. Знайти роботу, витрачену протягом 25 с, якщо довжина рукоятки $r = 0,4$ м, а кутова швидкість її $\omega = \pi/3$ рад/с.

Розв'язок. Передусім визначимо кутове переміщення φ рукоятки лебідки за 25 с:

$$\varphi = \omega t = \frac{\pi}{3} \times 25 = 26,18 \text{ рад.}$$

Далі скористаємося формулою для визначення роботи сили при обертальному русі:

$$W = T\varphi = Fr\varphi.$$

Підставивши числові значення, отримаємо

$$W = 200 \times 0,4 \times 26,18 \approx 2100 \text{ Дж} = 2,1 \text{ кДж}.$$

3.3.6 Потужність

Робота, що здійснюється якоюсь силою, може бути здійснена за різні проміжки часу. Щоб охарактеризувати, наскільки швидко здійснюється робота, у механіці існує поняття потужності, що позначається P .

Потужністю сили називається робота, що здійснюється в одиницю часу.

Якщо робота здійснюється рівномірно, то потужність обчислюють за формулою

$$P = \frac{W}{t}. \quad (3.76)$$

Якщо напрямок сили і напрямок переміщення збігаються, то цю формулу можна переписати в іншій формі:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} \text{ або } P = Fv. \quad (3.77)$$

Потужність сили дорівнює добутку модуля сили на швидкість точки її застосування.

Одиниця потужності:

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\text{робота}}{\text{час}} = \text{джоуль за секунду} = \text{ватт (Вт)}.$$

Якщо робота здійснюється силою, прикладеною до тіла, що обертається, і до того ж рівномірно, то потужність у цьому випадку обчислюють за формулою

$$P = \frac{W}{t} = \frac{T\varphi}{t} \text{ або } P = T\omega. \quad (3.78)$$

Потужність сили, прикладеної до тіла, що обертається, дорівнює добутку обертального моменту на кутову швидкість.

Приклад 3.11. За допомогою ременя передається потужність $P = 14,72$ кВт. Діаметр ремінного шківів $D = 1\,000$ мм, кутова швидкість $\omega = 5\pi$ рад/с. Передбачаючи натягнення S_1 тягової гілки ременя удвічі більшим натягнення S_2 керованої гілки, визначити S_1 і S_2 (рис. 3.15).

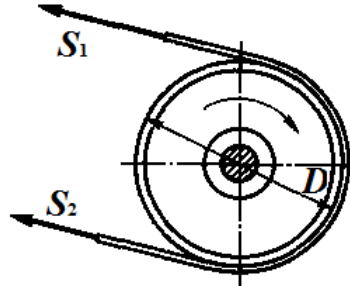


Рисунок 3.15

Розв'язок. Різниця натягнення гілок дорівнює силі тертя, що діє між ременем і шківом, і в цьому випадку є окружним зусиллям. Обертальний момент, що діє на шків, дорівнює

$$T = \frac{(S_1 - S_2)D}{2} = \frac{S_2 D}{2}.$$

З іншого боку, обертальний момент можна обчислити, знаючи потужність, що передається, і кутову швидкість

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{14\,720}{5\pi} = 936 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тепер можна визначити натягнення S_2 веденої гілки ременя:

$$S_2 = \frac{2T}{D} = \frac{2 \times 936}{1} = 1\,872 \text{ Н}.$$

За умовою натягнення тягової гілки в 2 рази більше натягнення керованої, отже,

$$S_1 = 2S_2 = 2 \times 1\,872 = 3\,744 \text{ Н}.$$

3.3.7 Коефіцієнт корисної дії

Здатність тіла під час переходу з одного стану в інший здійснювати роботу називається енергією.

Енергія – це загальна міра різних форм руху матерії.

Відносна кількість енергії, використовуваної в машині за прямим призначенням, характеризується коефіцієнтом корисної дії (к.к.д.), який позначається η .

Коефіцієнтом корисної дії називається відношення корисної роботи (або потужності) до витраченої:

$$\eta = \frac{W_{\text{к}}}{W_{\text{в}}} = \frac{P_{\text{к}}}{P_{\text{в}}}. \quad (3.79)$$

Якщо коефіцієнт корисної дії враховує лише механічні втрати, то він називається механічним к.к.д.

К.к.д. – завжди правильний дріб, інколи його виражають у відсотках:

$$\eta = \frac{W_{\text{к}}}{W_{\text{в}}} \cdot 100 \%. \quad (3.80)$$

Наведемо орієнтовні значення к.к.д. для найпоширеніших механізмів і машин:

- металообробні верстати – 0,8;
- кривошипно-повзунний механізм – 0,95;
- черв'ячна передача – до 0,92;
- теплові двигуни – до 0,40;
- турбіни – 0,95;
- електродвигуни – 0,92.

Якщо ряд механізмів з'єднаний послідовно, тобто кожен подальший механізм отримує рух від керованої ланки попереднього механізму, то тоді загальний к.к.д. η дорівнює добутку к.к.д. усіх механізмів:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n, \quad (3.81)$$

де $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ – к.к.д. кожного механізму окремо.

Як приклад визначимо к.к.д. шорсткої похилої площини з кутом підйому α , коли тіло силою тяжіння G рівномірно піднімається по цій площині на висоту h під дією горизонтальної сили F .

Якщо шлях, що було пройдено тілом, позначити s , то корисна робота $W_{\text{к}} = Gh = Gs \sin \alpha$, а витрачена робота $W_{\text{в}} = Fs \cos \alpha = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) s \cos \alpha$, тоді

$$\eta = \frac{W_{\text{к}}}{W_{\text{в}}} = \frac{Gs \sin \alpha}{G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) s \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (3.82)$$

Отже, к.к.д. похилої площини, коли рушійна сила горизонтальна, дорівнює

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}, \quad (3.83)$$

де α – кут, який складає плоскість похилої з горизонтом;

φ – кут тертя.

Зазвичай к.к.д. похилої площини зростає зі збільшенням кута її нахилу.

За такою саме формулою визначається к.к.д. під час роботи гвинта і гайки з прямокутним різьбленням (наприклад, у домкраті). К.к.д. гвинтової пари з трапецоїдним або трикутним різьбленням

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi')}, \quad (3.84)$$

де ψ – кут підйому гвинтової лінії різьблення;

φ' – приведений кут тертя.

3.4 Загальні теореми динаміки матеріальної точки

3.4.1 Теорема про зміну кількості руху

Кількістю руху $m\mathbf{v}$ матеріальної точки називається вектор, рівний добутку маси точки на її швидкість і який має напрямок швидкості. Кількість руху є динамічною мірою руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху

$$[m\mathbf{v}] = [m][\mathbf{v}] = \text{кг} \cdot \text{м/с}. \quad (3.85)$$

Імпульсом Ft постійної сили F називається вектор, рівний добутку сили на час її дії. Імпульс сили є міра її дії в часі.

Одиниця імпульсу сили

$$[Ft] = [F][t] = [m][a][t] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}. \quad (3.86)$$

Кількість руху та імпульс сили виражаються в однакових одиницях, зв'язок між ними встановлює теорема про зміну кількості руху, сформульована так: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той саме проміжок часу.

Доведемо цю теорему для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією постійної сили F , у цьому випадку рух буде рівнозмінім, формула швидкості якого записується так:

$$v = v_0 + at. \quad (3.87)$$

Перенесемо v_0 у ліву частину і помножимо обидві частини рівності на масу m матеріальної точки:

$$mv - mv_0 = mat. \quad (3.88)$$

Проте добуток маси точки на її прискорення є сила, під дією якої точка рухається; отже,

$$mv - mv_0 = Ft. \quad (3.89)$$

У лівій частині рівності маємо зміну кількості руху за час t , а в правій – імпульс сили за той саме проміжок часу, що і потрібно було довести.

Якщо рух сповільнений ($v < v_0$), то вектор сили направлений убік, протилежний до вектора швидкості, і, отже, в останню формулу потрібно підставляти силу з негативним знаком.

У разі криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної з модуля і напрямку сили весь проміжок часу t можна розбити на нескінченно малі проміжки, у межах яких вектор сили можна вважати постійним, а шлях – прямолінійним, тоді імпульс сили за кінцевий проміжок часу t дорівнюватиме сумі елементарних імпульсів. У цьому випадку математичний вираз теореми про зміну кількості руху набуває такого вигляду:

$$mv - mv_0 = \int_0^t F \partial t. \quad (3.90)$$

Якщо до матеріальної точки прикладені декілька постійних сил, то зміна кількості руху дорівнюватиме сумі (алгебраїчно, якщо сили діють по одній прямій, або векторною, якщо сили діють під кутом один до одного) імпульсів цих сил:

$$mv - mv_0 = \sum (F_i t). \quad (3.91)$$

Приклад 3.12. Тіло спускається без початкової швидкості по похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$ (рис. 3.16). Визначити час t , протягом якого швидкість руху тіла досягне 13,9 м/с. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,25$.

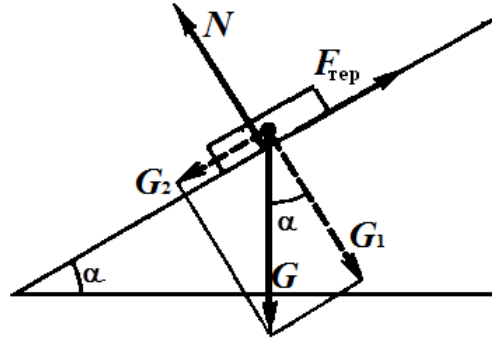


Рисунок 3.16

Розв'язок. Розглянемо тіло як матеріальну точку, рухому під дією сили тяжіння G , сили тертя $F_{\text{тер}}$ і нормальної реакції N похилої площини.

Розкладемо силу тяжіння G на складові G_1 і G_2 , одна з яких перпендикулярна, а інша паралельна похилій площині, і застосуємо теорему про зміну кількості руху:

$$mv - mv_0 = \sum (F_i t).$$

Спроектуємо цю векторну рівність на напрямок похилої площини, внаслідок чого отримаємо

$$mv - mv_0 = G_2 t - F_{\text{тер}} t.$$

Застосувавши другий закон тертя ковзання і підставивши значення, отримаємо

$$\frac{Gv}{g} = (G \sin \alpha - f G \cos \alpha) t,$$

звідки

$$t = \frac{v}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)} = \frac{13,9}{9,81(0,5 - 0,25 \times 0,866)} = 5 \text{ с.}$$

3.4.2 Теорема про зміну кінетичної енергії

Механічною енергією називають енергію переміщення і взаємодії тіл. Механічна енергія буває двох видів: кінетична і потенційна.

Кінетичною енергією, або енергією руху, називається енергія, якою володіє всяка матеріальна точка під час руху. Кінетична енергія – це динамічна міра руху матеріальної точки.

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.92)$$

Кінетична енергія – величина скалярна і завжди позитивна.

Одиниця кінетичної енергії:

$$[K] = [mv^2] = [m] \cdot [v^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2) \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Кінетична енергія має розмірність роботи. Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює теорема про зміну кінетичній енергії, сформульована так: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому шляху дорівнює роботі сили, прикладеної до точки, на тому саме шляху.

Доведемо цю теорему для найзагальнішого випадку руху матеріальної точки, тобто для випадку криволінійного руху під дією змінної сили (рис. 3.17). Запишемо для цієї точки основне рівняння динаміки:

$$ma = F, \quad (3.93)$$

де F – сила, що діє на точку;

a – повне прискорення точки;

m – маса точки.

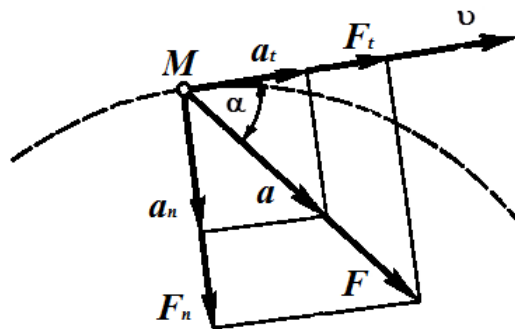


Рисунок 3.17

Спроектуємо цю векторну рівність на напрямок швидкості v точки:

$$ma \cos \alpha = F_1 = F \cos \alpha . \quad (3.94)$$

Як відомо з кінематики,

$$a \cos \alpha = a_1 = \frac{\partial v}{\partial t} , \quad (3.95)$$

отже,

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = F \cos \alpha . \quad (3.96)$$

Помноживши обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення ∂s , отримаємо

$$m \frac{\partial v}{\partial t} \partial s = F \cos \alpha \partial s . \quad (3.97)$$

Вираз, що стоїть у лівій частині рівності, перетворимо так:

$$m \frac{\partial v}{\partial t} \partial s = m \partial v \frac{\partial s}{\partial t} = m v \partial v , \quad (3.98)$$

отже,

$$m v \partial v = F \cos \alpha \partial s . \quad (3.99)$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності в межах для швидкості від v_0 до v і для шляху від 0 до s :

$$m \int_{v_0}^v v \partial v = \int_0^s F \cos \alpha \partial s , \quad (3.100)$$

отримаємо

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W , \quad (3.101)$$

де W – робота сили F на шляху s . Теорема доведена.

За сповільненого руху ($v < v_0$) складова F_t , що викликає дотичне прискорення a_t буде направлена убік, протилежний до напрямку вектора швидкості v , і робота сили F буде негативною.

Складова F_n , що викликає нормальне прискорення a_n , роботи не здійснює, оскільки ця складова в кожен конкретний момент перпендикулярна елементарному переміщенню точки прикладення сили F .

Якщо до матеріальної точки прикладені декілька сил, то зміна кінетичної енергії дорівнює алгебраїчній сумі цих сил:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum W_i. \quad (3.102)$$

Приклад 3.13. Головну частину приладу для випробування матеріалів ударом складає сталеве важке відливання M , прикріплене до стрижня, який може обертатися майже без тертя довкола нерухомої горизонтальної осі O (рис. 3.18). Нехтуючи масою стрижня, розглядаємо відливання M як матеріальну точку, для якої відстань $MO = 0,918$ м. Визначити швидкість v цієї точки в найнижчому положенні B , якщо вона падає з найвищого положення A з дуже малою початковою швидкістю.

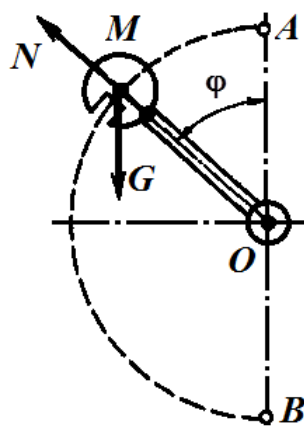


Рисунок 3.18

Розв'язок. Позначимо силу тяжіння відливання G . Застосувавши принцип звільняємості і теорему про зміну кінетичній енергії і розглядаючи відливання як матеріальну точку, на яку діють сила тяжіння G і реакція N стрижня, направлена уздовж стрижня, отримаємо

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W_G + W_N.$$

Згідно з теоремою про роботу сили тяжіння, маємо

$$W_G = G \cdot AB = G \cdot 2MO.$$

Робота реакції N дорівнює нулю, оскільки момент цієї сили відносно осі обертання стрижня дорівнює нулю. Силою тертя, за умовою, нехтуємо.

Підставимо цей вираз роботи в першу формулу і, враховуючи, що $v_0 = 0$, отримаємо

$$\frac{Gv^2}{2g} = G \cdot 2MO.$$

Скоротимо обидві частини рівності на G і підставимо числові значення, тоді

$$v = \sqrt{2MO \cdot 2g} = 2\sqrt{0,981 \times 9,81} = 6,2 \text{ м/с}.$$

Приклад 3.14. По рейках, прокладених по дорозі AB і створюючи потім петлю радіусу r , котиться вагонетка M силою тяжіння G (рис. 3.19). З якої висоти H потрібно пустити вагонетку без початкової швидкості, щоб вона могла пройти все коло кільця, не відділяючись від нього?

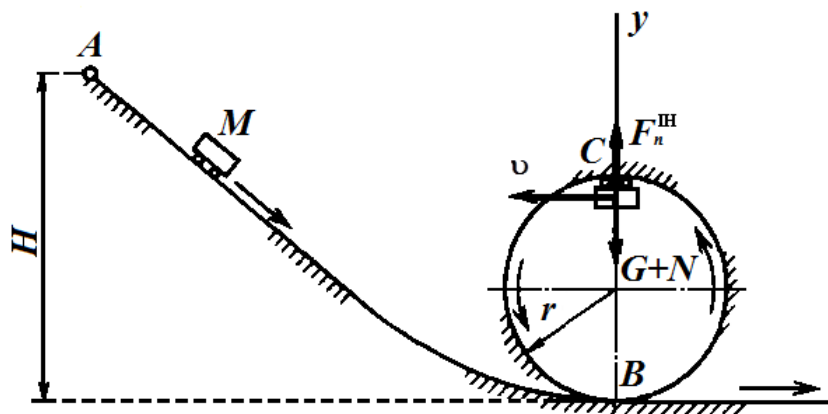


Рисунок 3.19

Розв'язок. Розглянемо вагонетку як матеріальну точку. Для розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії на шляху ABC :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W_G + W_N,$$

до того ж робота W_N нормальної реакції N рейок дорівнює нулю. На підставі теореми про роботу сили тяжіння

$$W_G = G(H - 2r).$$

Оскільки, за умовою, $v_0 = 0$, а $m = G/g$, то, підставивши ці вирази в першу формулу, отримаємо

$$\frac{Gv^2}{2g} = (H - 2r)G,$$

звідки

$$v^2 = 2g(H - 2r). \quad (3.103)$$

Далі застосуємо принцип Даламбера. Прикладемо до вагонетки відцентрову силу інерції $F_n^{\text{ін}} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$, спроектуємо сили, що діють на вагонетку, на вісь y і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0, F_n^{\text{ін}} - G - N = 0,$$

де N – реакція рейок.

Очевидно, що найменше значення відцентрової сили $F_n^{\text{ін}}$, за якого вагонетка не відокремитися від рейок, буде за $N = 0$. Крім того,

$$F_n^{\text{ін}} - G = 0 \text{ або } \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = G.$$

Звідси

$$v^2 = gr. \quad (3.104)$$

Порівнюючи вирази (3.103) і (3.104) і прирівнявши їхні праві частини, отримаємо

$$2g(H - 2r) = gr,$$

звідки

$$H = 2,5r.$$

Очевидно, що значення висоти H , знайдене з цього виразу, мінімально.

Звертаємо увагу на те, що під час розв'язання не беруться до уваги сили тертя і опору повітря. Тому для виконання мертвої петлі практично необхідно, щоб $H > 2,5r$.

3.4.3 Закон збереження механічної енергії

Енергію взаємодії між тілами називають потенційною.

Всяка матеріальна точка, піднята на певну висоту h , також має деяку енергією, яка називається енергією положення і є потенційною енергією. Мірою потенційної енергії в цьому випадку є робота, яку виконає точка під час вільного падіння.

Вважаючи величину h невеликої порівняно з розмірами Землі, а тому вважаючи постійною силу тяжіння G , отримаємо вираз для потенційної енергії Π :

$$\Pi = Gh. \quad (3.105)$$

Потенційна енергія тіла, піднятого на певну висоту, є величина відносна, залежна від системи відліку, відносно якої обчислюється ця енергія.

Нехай матеріальна точка масою m , падаючи під дією однієї лише сили тяжіння G , у положенні M_1 знаходилася на висоті h_1 , мала швидкість v_1 і мала потенційну енергію Π_1 (рис. 3.20). У положенні M_2 точка виявилася на висоті h_2 , її швидкість стала v_2 , а потенційна енергія Π_2 .

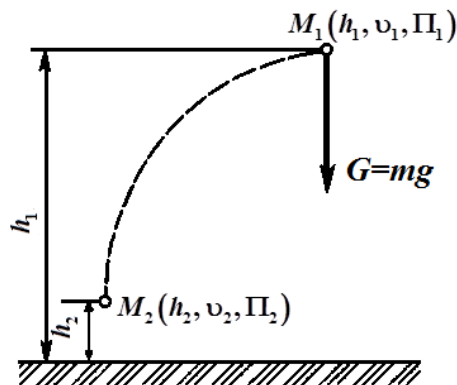


Рисунок 3.20

Під час падіння точки під дією однієї лише сили тяжіння здійснюється робота

$$W = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2 = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (3.106)$$

Згідно з теоремою, доведеною в попередньому пункті, ця робота дорівнює зміні кінетичній енергії:

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1, \quad (3.107)$$

або

$$\Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1, \quad (3.108)$$

отже,

$$П_1 + K_1 = П_2 + K_2, \quad (3.109)$$

або

$$П + K = \text{const.} \quad (3.110)$$

Ця рівність є математичним виразом закону збереження механічної енергії, який формулюється так: при русі матеріальної точки під дією однієї лише сили тяжіння сума потенційної і кінетичної енергій є величина постійна.

Цей закон справедливий при русі під дією будь-якої потенційної сили; при дії ж непотенційних сил (наприклад, сили тертя) механічна енергія переходить в інші види енергії.

Одним із найважливіших висновків теорії відносності є закон пропорційності енергії і маси тіла. Математичний вираз цього закону має такий вигляд:

$$E = mc^2, \quad (3.111)$$

де E – повний запас енергії тіла (що містить механічну, теплову, хімічну, електромагнітну, ядерну енергію, а також енергію часток, що входять до складу атома);

m – маса тіла;

c – швидкість світла.

На підставі наведеної вище рівності, званої формулою Ейнштейна, неважко підрахувати, що одному граму маси відповідає 25 млн кВт · год енергії ($1 \text{ кВт} \cdot \text{год} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$).

Приклад 3.15. Матеріальна точка кинута із Землі вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Нехтуючи опором повітря, визначити:

– висоту h максимального підйому точки;

– швидкість v , яку матиме точка на висоті $h/2$ при падінні.

Розв'язок. Для розв'язання першої частини задачі запишемо вирази кінетичної і потенційної енергії у момент початку руху:

$$K_1 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad П_1 = 0$$

і у момент максимального підйому:

$$K_2 = 0, \quad П_2 = mgh,$$

де m – маса матеріальної точки.

Згідно із законом збереження механічної енергії,

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2$$

або

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh.$$

Звідси, скоротивши обидві частини рівності на m , визначимо висоту h максимального підйому точки

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Для розв'язання другої частини задачі запишемо вирази кінетичної і потенційної енергій на висоті $h/2$:

$$K_3 = \frac{mv^2}{2}, \Pi_3 = \frac{mgh}{2}.$$

Згідно із законом збереження механічної енергії,

$$K_2 + \Pi_2 = K_3 + \Pi_3$$

або

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mgh}{2}.$$

Звідси, скоротивши обидві частини рівності на m і зробивши приведення подібних членів, визначимо швидкість:

$$v = \sqrt{gh}.$$

Підставивши знайдене раніше значення h , отримаємо

$$v = \sqrt{\frac{gv_0^2}{2g}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

3.5 Основи динаміки системи матеріальних точок

3.5.1 Рівняння поступального ходу твердого тіла

Механічною системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, якимось чином зв'язаних між собою. Всяке тверде тіло можна вважати незмінною механічною системою матеріальних точок.

Сили взаємодії точок цієї системи називаються внутрішніми; сили, з якими діють на цю систему інші точки, що не входять в цю систему, – зовнішніми.

Нехай тверде тіло масою m рухається під дією сили F поступально з прискоренням a (рис. 3.21).

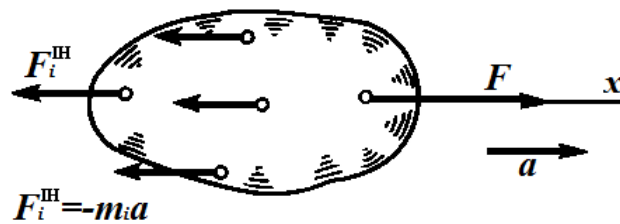


Рисунок 3.21

Розіб'ємо тіло на ряд матеріальних точок з масами m_i і застосуємо принцип Даламбера (відмітимо, що внутрішні сили в рівняння рівноваги не входять, оскільки на підставі третього закону Ньютона їхня сума для системи в цілому дорівнює нулю). До кожної матеріальної точки прикладемо силу інерції $F_i^{in} = -m_i a$ і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0, F - \sum F_i^{in} = 0, \quad (3.112)$$

звідки

$$F = \sum F_i^{in} = \sum (m_i a). \quad (3.113)$$

Оскільки при поступальному ході всі точки тіла мають однакові прискорення, то a можна винести за знак суми, тобто

$$F = a \sum m_i = am. \quad (3.114)$$

Згідно з другим законом Ньютона, вектори сили F і прискорення a збігаються за напрямком, тому можна записати

$$F = ma. \quad (3.115)$$

Це і є рівняння поступального ходу твердого тіла.

Це рівняння нічим не відрізняється від основного рівняння динаміки точки, отже, всі формули динаміки точки застосовні для тіла, рухомого поступально.

3.5.2 Рівняння обертального руху твердого тіла

Нехай тверде тіло під дією системи сил обертається довкола нерухомої осі z з кутовим прискоренням α (рис. 3.22).

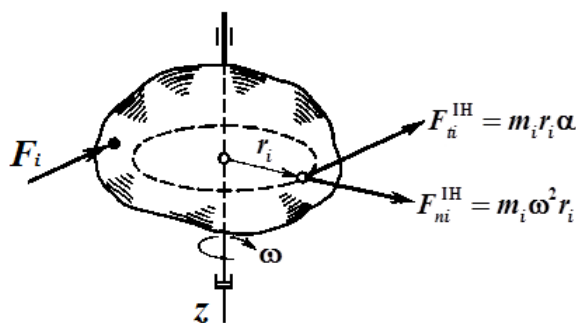


Рисунок 3.22

Розіб'ємо тіло на ряд матеріальних точок із масами m_i і застосуємо принцип Даламбера. До кожної матеріальної точки прикладені дотична і нормальна сили інерції. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_z = 0, \sum M_z(F_i) - \sum M_z(F_{ti}^{IH}) = 0. \quad (3.116)$$

Моменти реакцій підшипника і підп'ятника, а також сили F_{ti}^{IH} відносно осі z дорівнюють нулю, оскільки лінії дії цих сил перетинають вісь; сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання називається обертальним моментом. Тоді

$$\sum M_z(F_i) = T = \sum M_z(F_{ti}^{IH}) = \sum (m_i r_i^2 \alpha) = \alpha \sum (m_i r_i^2). \quad (3.117)$$

Вираз $\sum (m_i r_i^2)$ називають моментом інерції тіла відносно осі та позначають J :

$$J = \sum (m_i r_i^2). \quad (3.118)$$

Момент інерції тіла відносно осі є сума добутків мас матеріальних точок, що складають це тіло, на квадрат їхніх відстаней до цієї осі.

У результаті отримуємо формулу

$$T = J\alpha, \quad (3.119)$$

яка називається рівнянням обертального руху твердого тіла. У цій формулі J – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Одиниця моменту інерції:

$$[J] = [mr^2] = [m] \cdot [r^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Розглянемо наступний приклад.

Нехай потрібно повідомити двом однаковим кулям (рис. 3.23) однакове кутове прискорення α . Оскільки $r_1 > r_2$, то $J_1 > J_2$. Дослідним шляхом, а також за допомогою рівняння обертального руху можна переконатися в тому, що для надання цим системам однакового кутового прискорення α потрібно буде прикласти різні обертальні моменти:

$$T' = J_1 \alpha, T'' = J_2 \alpha. \quad (3.120)$$

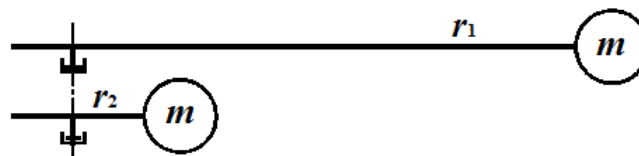


Рисунок 3.23

Розділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{T'}{T''} = \frac{J_1}{J_2}. \quad (3.121)$$

Отже, чим більше момент інерції тіла, тим більший обертальний момент потрібно прикласти, щоб повідомити тілу задане кутове прискорення.

З викладеного ясно, що момент інерції грає в обертальному русі таку саме роль, яку маса грає в поступальній ході, отже, момент інерції є міра інертності тіла, що обертається.

Як приклад обчислимо момент інерції тонкого однорідного суцільного диска радіусом R , завтовшки s , масою m відносно осі, перпендикулярній площині диска і що проходить через його центр O (рис. 3.24).

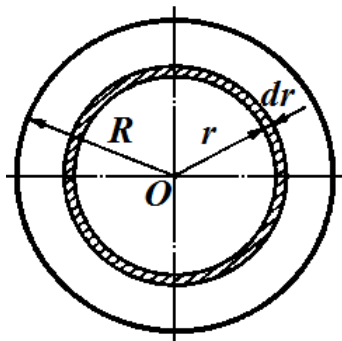


Рисунок 3.24

Розіб'ємо диск на елементарні кільця змінного радіусу r , шириною ∂r і завтовшки s . Згідно з визначенням, момент інерції такого кільця дорівнює

$$\partial J = \partial \sum (m_i r^2) = r^2 \partial \sum m_i = r^2 \partial m = r^2 2\pi r \partial r s \rho = 2\pi s \rho r^3 \partial r, \quad (3.122)$$

де ρ – щільність матеріалу диска.

Підсумувавши моменти інерції всіх елементарних кілець, отримаємо момент інерції J усього диска:

$$J = \int_0^R 2\pi s \rho r^3 \partial r = 2\pi s \rho \int_0^R r^3 \partial r = 2\pi s \rho \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \pi s \rho \frac{R^4}{2}. \quad (3.123)$$

Оскільки маса диска $m = \pi R^2 s \rho$, то

$$J = \frac{m R^2}{2}, \quad (3.124)$$

що і потрібно було довести.

Неважко зрозуміти, що момент інерції однорідного суцільного прямого кругового циліндра радіусом R і масою m будь-якої висоти обчислюватиметься за такою саме формулою. Щоб переконатися в цьому, достатньо уявно розбити весь циліндр плоскістю, паралельною основі, на тонкі диски і підсумувати моменти інерції всіх дисків.

Моменти інерції для деяких інших однорідних тіл мають такі вирази, які наведемо без висновків:

– куля масою m , радіусом R відносно діаметра

$$J = \frac{2}{5} m R^2; \quad (3.125)$$

– тонка сферична оболонка масою m , радіусом R відносно діаметру

$$J = \frac{m l^2}{3}; \quad (3.126)$$

– порожнистий вал масою m , зовнішнім радіусом R і радіусом отвору r відносно осі

$$J = m \frac{R^2 + r^2}{2}. \quad (3.127)$$

Момент інерції J тіла відносно будь-якої осі r , паралельної центральній (тобто тяжінню, що проходить через центр C тіла), дорівнює центральному моменту інерції J_C плюс добуток маси m тіла на квадрат відстані a тіла на квадрат відстані

$$J_z = J_C + ma^2. \quad (3.128)$$

З цієї формули виходить, що з усіх моментів інерції тіла відносно паралельних осей найменшим буде момент інерції відносно центральної осі, тобто центральний момент інерції.

Інколи момент інерції визначають за формулою:

$$J = mr_i^2, \quad (3.129)$$

де r_i – радіус інерції тіла;

$$r_i = \sqrt{\frac{J}{m}}. \quad (3.130)$$

Фізичний сенс радіусу інерції такий: якщо масу тіла зосередити в одній точці (така маса називається приведеною) і розмістити її від осі обертання на відстані, що дорівнює радіусу інерції, то момент інерції приведеної маси дорівнюватиме моменту інерції цього тіла відносно тієї самої осі.

Подвоєний радіус інерції називається діаметром інерції:

$$D_i = 2r_i. \quad (3.131)$$

У практиці інколи замість моменту інерції користуються поняттям махового моменту GD_i^2 .

Маховим моментом називається добуток сили тяжіння G тіла, що обертається, на квадрат його діаметра інерції.

Одиниця махового моменту

$$[GD_i^2] = [G] \cdot [D_i^2] = \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

Між маховим моментом і моментом інерції існує проста залежність

$$GD_i^2 = mg(2r_i)^2 = 4gmr_i^2 \quad (3.132)$$

або

$$GD_i^2 = 4gJ = 39,24J. \quad (3.133)$$

Приклад 3.16. Тонкий однорідний стрижень силою тяжіння G , довжиною $l = 150$ мм здійснює коливальний рух у вертикальній площині під дією сили тяжіння; точка підвісу збігається з кінцем стрижня (рис. 3.25). Визначити кутове прискорення стрижня в той момент, коли він складає з вертикаллю кут $\gamma = \pi/6$ рад.

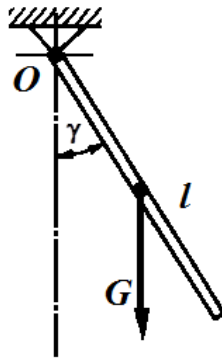


Рисунок 3.25

Розв'язок. За умовою задачі стрижень однорідний, отже, його центр тяжіння знаходиться посередині. Застосуємо рівняння обертального руху тіла

$$T = J\alpha.$$

Обертальний момент дорівнює моменту сили тяжіння відносно осі обертання стрижня:

$$T = \frac{Gl}{2} \sin \gamma.$$

Момент інерції стрижня обчислюється за формулою

$$J = \frac{ml^2}{3} = \left(\frac{G}{g} \right) \cdot \left(\frac{l^2}{3} \right).$$

Підставимо вирази обертального моменту і моменту інерції в рівняння обертального руху:

$$\frac{Gl}{2} \sin \gamma = \left(\frac{G}{g} \right) \cdot \left(\frac{l^2}{3} \right).$$

і визначимо кутове прискорення:

$$\alpha = \frac{3g \sin \gamma}{2l} = \frac{3 \times 9,81 \times 0,5}{2 \times 0,15} = 49,05 \text{ рад/с}^2.$$

Приклад 3.17. Маховий момент ротора електродвигуна дорівнює $2,7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$. Обертальний момент $T = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Визначити час розгону, якщо кінцева швидкість обертання ротора $\omega = 30\pi \text{ рад/с}$.

Розв'язок. Оскільки на ротор діє постійний обертальний момент, то й рух ротора буде рівноприскореним. Запишемо рівняння кутової швидкості цього руху, враховуючи, що $\omega_0 = 0$:

$$\omega = \alpha t = 30\pi,$$

звідки

$$\alpha = 30\pi/t \text{ рад/с}^2.$$

Далі застосуємо рівняння обертального руху ротора

$$T = J\alpha = J \cdot 30\pi/t.$$

З цієї рівності визначимо час розгону, виразив момент інерції ротора через маховий момент, який дорівнює $4gJ$:

$$t = J \cdot 30\pi/T = \frac{4gJ}{4gT} 30\pi = \frac{2,7}{4 \times 9,81 \times 40} 30\pi = 0,162 \text{ с}.$$

3.5.3 Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок, що складають це тіло:

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (3.134)$$

Обчислимо вираз для кінетичної енергії твердого тіла в трьох випадках руху.

1. Тіло рухається поступально. Враховуючи, що в разі поступальної ходи всі точки тіла мають однакові швидкості, запишемо

$$K_{\text{пост}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i, \text{ або } K_{\text{пост}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.135)$$

Отже, в разі поступальної ходи твердого тіла його кінетична енергія обчислюється за тією саме формулою, що і кінетична енергія матеріальної точки.

2. Тіло обертається довкола нерухомої осі.

Запишемо

$$K_{o6} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum (m_i r_i^2), \quad (3.136)$$

або

$$K_{o6} = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (3.137)$$

Кінетична енергія твердого тіла, що обертається довкола нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

3. Тіло рухається плоскопаралельно. Як відомо з кінематики, складний плоскопаралельний рух твердого тіла в кожен конкретний момент можна вважати простим обертальним рухом довкола миттєвої осі (метод миттєвих центрів швидкостей). Допустимо, що відома швидкість v_c центра тяжіння тіла, тоді миттєва кутова швидкість

$$\omega = \frac{v_c}{OC}, \quad (3.138)$$

де OC – відстань центра тяжіння C тіла від миттєвої осі обертання O . Момент інерції J_o відносно миттєвої осі обертання обчислюють за формулою:

$$J_o = J_c + mOC^2, \quad (3.139)$$

де J_c – момент інерції відносно центральної осі, або центральний момент інерції.

Кінетичну енергію тіла, рухомого плоскопаралельно, визначають таким чином:

$$K_{nn} = \frac{J_o \omega^2}{2} = (J_c + mOC^2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_c \omega^2}{2} + \frac{mOC^2}{2} \cdot \frac{v_c^2}{OC^2}, \quad (3.140)$$

або

$$K_{nn} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}. \quad (3.141)$$

Кінетична енергія твердого тіла, рухомого плоскопаралельно, дорівнює сумі кінетичних енергій в поступальній ході разом з центром

тяжіння і обертальному руху довкола центральної осі, перпендикулярної основній площині.

На закінчення розділу сформулюємо теорему про зміну кінетичній енергії системи тіл: зміна кінетичної енергії системи тіл за деякого переміщення дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх (активних і реактивних) і внутрішніх сил, що діяли на систему при вказаному переміщенні:

$$\sum K - \sum K_0 = \sum W. \quad (3.142)$$

Кінетична енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних енергій кожного тіла окремо. Якщо тіло тверде, то сума робіт його внутрішніх сил дорівнює нулю. Якщо зв'язки рахувати ідеально гладкими, то сума робіт реакцій цих зв'язків також дорівнюватиме нулю.

3.5.4 Порівняння формул динаміки для поступального і обертального ходів твердого тіла

Порівнюючи формули динаміки точки або поступально рухомого тіла з формулами обертального руху тіла, легко відмітити, що ці формули за структурою аналогічні. Щоб з формул поступального ходу отримати формули обертального руху, необхідно замість сили підставити обертальний момент, замість лінійного переміщення – кутове переміщення, замість лінійної швидкості – кутову швидкість, замість лінійного прискорення – кутове прискорення, а замість маси – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Порівняння формул поступального і обертального ходу зручно провести за допомогою таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Порівняння формул поступального і обертального ходу

Порівняльні рівняння і динамічні заходи	Види руху	
	поступальний	обертальний
Рівняння руху	$F = ma$	$T = J\alpha$
Робота	$W = Fs$	$W = T\varphi$
Потужність	$P = Fv$	$P = T\omega$
Кінетична енергія	$K = mv^2/2$	$K = J\omega^2/2$

Приклад 3.18. Обчислити кінетичну енергію колеса радіусом r , масою m , що котиться по прямолінійній рейці без ковзання, якщо швидкість центра тяжіння C колеса дорівнює v_C . Колесо вважати суцільним однорідним циліндром (рис. 3.26).

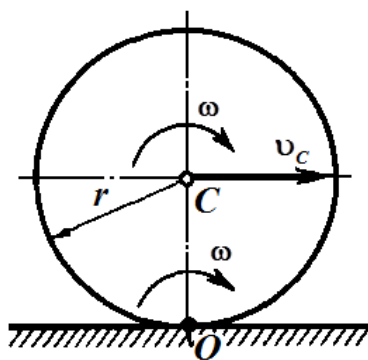


Рисунок 3.26

Розв'язок. Розв'яжемо цей приклад двома способами. Як відомо з кінематики, складний плоскопаралельний рух колеса можна розглядати або як простий обертальний рух довкола миттєвої осі O з кутовою швидкістю ω (метод миттєвих центрів швидкостей), або як складний рух, що складається з поступального ходу з швидкістю v_C і відносного обертового руху довкола осі C (метод розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний). Нагадаємо, що абсолютна (миттєва) і відносні кутові швидкості колеса завжди рівні між собою.

1. Метод миттєвих центрів швидкостей. У цьому випадку кінетична енергія колеса обчислюється за формулою

$$K = \frac{J_0 \omega^2}{2},$$

де J_0 – момент інерції колеса відносно миттєвої осі обертання O .

Момент інерції відносно осі O дорівнює

$$J_0 = J_C + mr^2.$$

Момент інерції суцільного однорідного циліндра відносно його геометричної осі обчислюють за формулою:

$$J_C = \frac{mr^2}{2},$$

отже,

$$J_0 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Тепер обчислимо кінетичну енергію колеса:

$$K = \frac{J_o \omega^2}{2} = \frac{3}{2} m r^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{r} \right)^2 = \frac{3}{4} m v_c^2.$$

2. Метод розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний. У цьому випадку кінетична енергія колеса дорівнює сумі кінетичних енергій в поступальний і обертальний ходи:

$$K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{m r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{r} \right)^2 = \frac{3}{4} m v_c^2.$$

Приклад 3.19. Вантаж Q , опускаючись, обертає однорідний циліндр сила тяжіння якого G , а радіус r (рис. 3.27). Нехтуючи тертям на осі циліндра, знайти натягнення S нитки, кутову швидкість ω і прискорення α циліндра, коли вантаж Q опуститься на відстань h . Спочатку система знаходилася у спокої.

Розв'язок. Для розв'язання задачі розчленуємо систему на дві частини і розглянемо окремо поступальний хід вантажу і обертальний рух циліндра. Оскільки на систему діють постійні сили, то і циліндр рухатимуться з постійними прискореннями a (вантаж) і α (циліндр).

Лінійне прискорення a вантажу дорівнює дотичному прискоренню точок, що лежать на поверхні циліндра:

$$a = \alpha r = \text{const},$$

де α – кутове прискорення циліндра.

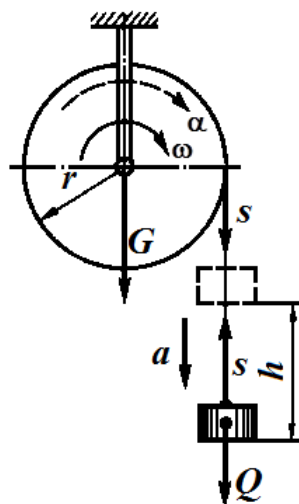


Рисунок 3.27

За умовою початкова швидкість $v_0 = 0$, а кінцеву швидкість вантажу, що пройшов шлях h з постійним прискоренням a , визначимо з формули кінематики:

$$h = \frac{v^2 v_0^2}{2f},$$

звідки

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2\alpha rh}.$$

Далі скористаємося теоремою про зміну кінетичній енергії матеріальної точки і застосуємо її до вантажу, що рухається поступово:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W.$$

Підставивши вирази маси, швидкості і роботи, отримаємо

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{2\alpha rh}{2} = (Q - S)h.$$

Звідси реакція S нитці дорівнює

$$S = Q - \frac{Q\alpha r}{g}.$$

Далі запишемо рівняння обертального руху циліндра

$$T = J\alpha.$$

Обертальний момент

$$T = Sr = \left(Q - \frac{Q\alpha r}{g} \right) r,$$

а момент інерції циліндра обчислимо за формулою

$$J = \frac{mr^2}{2} = \frac{Gr^2}{2g}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння обертального руху, отримаємо

$$\left(Q - \frac{Q\alpha r}{g} \right) r = \frac{Gr^2\alpha}{2g}.$$

Звідси визначимо кутове прискорення циліндра:

$$\alpha = \frac{2Qg}{r(G + 2Q)}.$$

Тепер можна визначити кутову швидкість циліндра:

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{2\alpha rh}{r}}.$$

Підставивши значення кутового прискорення, отримаємо

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{2rh \frac{2Qg}{r(G + 2Q)}},$$

звідки

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Qgh}{G + 2Q}}.$$

На закінчення визначимо кутову швидкість циліндра за допомогою теореми про зміну кінетичній енергії системи тіл. Враховуючи, що спочатку система знаходилася у спокої, що робота сили тяжіння циліндра дорівнює нулю (точка її застосування не переміщається), і нехтуючи тертям, матимемо

$$K_G + K_Q = W_Q,$$

де

$$K_G = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{Gr^2}{g \cdot 2} \cdot \frac{\omega^2}{2}, K_Q = \frac{Q(\omega r)^2}{g \cdot 2}, W_Q = Qh.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\frac{Gr^2\omega^2}{4g} + \frac{Qr^2\omega^2}{2g} = Qh.$$

Звідки

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Qgh}{G + 2Q}}.$$

3.5.5 Поняття про балансування тіл, що обертаються

Балансуванням називається урівноваження мас механізмів, що обертаються або поступально рухомих, з тим щоб знищити вплив сил інерції. У цьому пункті розглядається лише балансування деталей машин, що обертаються.

Неврівноваженістю ротора (тіла, що обертається в опорах) називається його стан, що характеризується таким розподілом мас, який за час обертання викликає змінні навантаження на опорах. Ці навантаження є причиною струсів і вібрацій, передчасного зносу, знижують к.к.д. і продуктивність машин. Особливо небажана неуврівноваженість у швидкохідних машинах.

Розглянемо випадок статичної неуврівноваженості, коли центр тяжіння тіла не лежить на осі обертання.

Уявимо собі маховик масою m , що обертається з постійною кутовою швидкістю ω . Припустимо, що центр тяжіння C маховика не лежить на осі обертання, а зміщений на величину $e_{ст}$, звану ексцентриситетом маси (рис. 3.28).

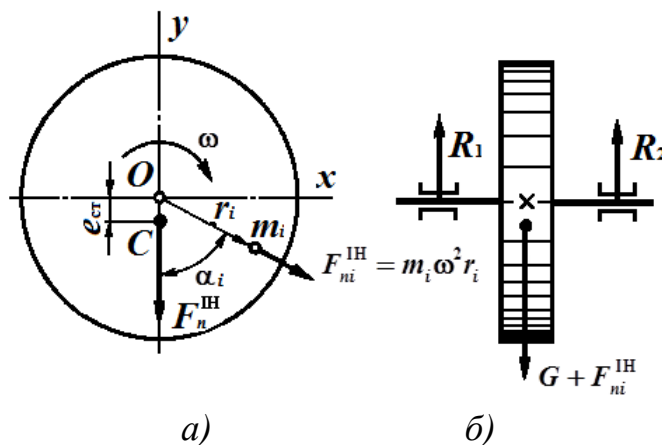


Рисунок 3.28

Силу тяжіння маховика позначимо G , масою осі нехтуємо. Розіб'ємо маховик на ряд матеріальних точок з масами m_i і визначимо рівнодійну відцентрових сил інерції F_{ni}^{IH} . Проекція цієї рівнодійної на вісь x унаслідок симетрії маховика відносно осі y дорівнює нулю, тобто

$$F_{nx}^{IH} = \sum (F_{ni}^{IH} \sin \alpha_i) = 0. \quad (3.143)$$

Отже, рівнодійна $F_n^{\text{Ін}}$ сил $F_{ni}^{\text{Ін}}$ проектується на вісь y в натуральну величину. Тоді

$$F_n^{\text{Ін}} = F_{ny}^{\text{Ін}} \sum (F_{ni}^{\text{Ін}} \cos \alpha) = \sum (m_i \omega^2 r_i \cos \alpha_i) = \omega^2 \sum (m_i y_i) = \omega^2 \sum (m_i y_i) = \omega^2 m e_{\text{ст}}, \quad (3.144)$$

оскільки із статички відомо, що

$$\sum (m_i y_i) = m y_c = m e_{\text{ст}}. \quad (3.145)$$

Таким чином, рівнодійна сил інерції всього маховика направлена по лінії OC і дорівнює

$$F_n^{\text{Ін}} = m \omega^2 e_{\text{ст}} \quad (3.146)$$

($F_i^{\text{Ін}} = 0$, оскільки $\omega = \text{const}$).

Застосуємо принцип Даламбера і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0; R_1 + R_2 - G - F_n^{\text{Ін}} = 0. \quad (3.147)$$

Оскільки сила інерції $F_n^{\text{Ін}}$ під час обертання змінює своє положення, то максимальна сила тиску на підшипники буде при нижньому положенні центра тяжіння

$$F_{\text{max}} = R_1 + R_2 = G + F_n^{\text{Ін}}. \quad (3.148)$$

Визначимо силу тиску F_{max} на підшипники, якщо маса маховика $m = 102$ кг, його частота обертання $3\,000$ хв⁻¹, а ексцентриситет маси $e_{\text{ст}} = 1$ мм.

За $\omega = \pi n / 30 = \pi \cdot 3\,000 / 30 = 100\pi$ рад/с

$$F_n^{\text{Ін}} = m \omega^2 e_{\text{ст}} = 102 \times (100\pi)^2 \times 0,001 \approx 10\,000 \text{ Н};$$

$$F_{\text{max}} = mg + F_n^{\text{Ін}} = 102 \times 9,8 + 10\,000 = 11\,000 \text{ Н}. \quad (3.149)$$

Як видно з прикладу, динамічні навантаження можуть у багато разів перевищувати силу тяжіння рухомих частин машини.

Із сказаного вище можна зробити такий висновок: для урівноваження тіла, що обертається, необхідно, щоб центр тяжіння його лежав на осі обертання.

Статичну невірноваженість легко виявити шляхом статичного балансування на двох горизонтальних паралельних ножах балансувань. Деталь, що не має статичної невірноваженості, знаходитиметься на ножах в стані байдужої рівноваги.

Невірноваженість ротора характеризується величиною дисбалансу. Добуток невірноваженої маси на її ексцентриситет називається значенням дисбалансу і виражається в $\text{г} \cdot \text{мм}$.

Сформульована вище умова урівноваження тіла, що обертається, не є достатньою, оскільки динамічні навантаження можуть виникати і у тому випадку, коли центр тяжіння лежить на осі обертання. Розглянемо колінчастий вал двоциліндрового двигуна (рис. 3.29).

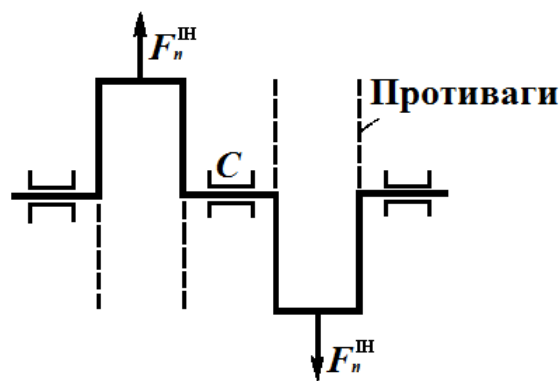


Рисунок 3.29

У цьому випадку, навіть якщо центр тяжіння C лежить на осі обертання, виникає пара сил інерції $F_n^{\text{ін}}$, що викликає вигин валу і додатковий тиск на опори, змінні за напрямком.

Така невірноваженість називається миттєвою, і її можна виявити за достатньо швидкого обертання, але не у спокої. Якщо статична і миттєва невірноваженості існують одночасно, то така невірноваженість називається динамічною.

Причинами невірноваженості можуть бути неточності у виготовленні і збірці деталей, нерівномірність розподілу матеріалу, деформація деталей, великі зазори в обертальних парах тощо.

Уразі значної невірноваженості ставлять противаги (рис. 3.30), маса яких інколи досягає десятків тисяч кілограмів.

3.5.6 Деякі відомості про механізми

Закони і методи теоретичної механіки знаходять своє практичне застосування перш за все в теорії механізмів, оскільки механізми є кінематичною основою всіх машин, механічних приладів і промислових роботів.

Кінематичні пари в ланцюзі можуть бути плоскими і просторовими. Ланки плоских механізмів здійснюють плоскопаралельний рух.

Основні плоскі механізми з нижчими парами. Ланки нижчих пар стикаються по поверхнях (поступальні, обертальні та гвинтові пари).

Основним типом плоского механізму є шарнірний чотиригранник, принципова схема якого змальована на рисунку 3.30, *а*. У цьому механізмі чотири обертальні кінематичні пари і чотири ланки: (1) – кривошип, (2) – шатун, (3) – коромисло, (4) – стійка. Такий механізм називається кривошипно-коромисловим і є однокривошипним; крайні положення ланок показані на рисунку 3.30, *а*.

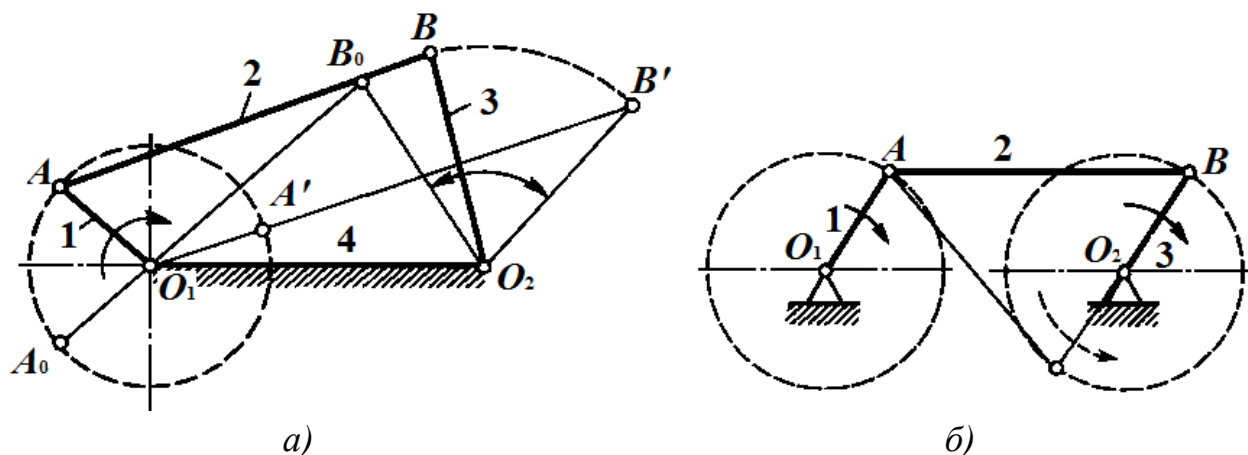


Рисунок 3.30

Якщо стійка шарнірного чотиригранника найкоротша ланка або якщо ланки (1) і (3) дорівнюють за довжиною, то механізм стає двокривошипним, оскільки ланка (3) так само, як і кривошип (1), дістане можливість здійснювати повний зворот.

На рисунку 3.30, *б* показана схема двокривошипного механізму, який називається шарнірним паралелограмом; у такого механізму обидва кривошипи обертаються в одному напрямку з однаковою кутовою швидкістю, а шатун (2) рухається поступально. На рисунку 3.30, *б* тонкими лініями показаний шарнірний антипаралелограм, кривошипи якого обертаються в протилежних напрямках.

На рисунку 3.31 показані схеми вживання шарнірного чотиригранника в пастозмішувальних машинах.

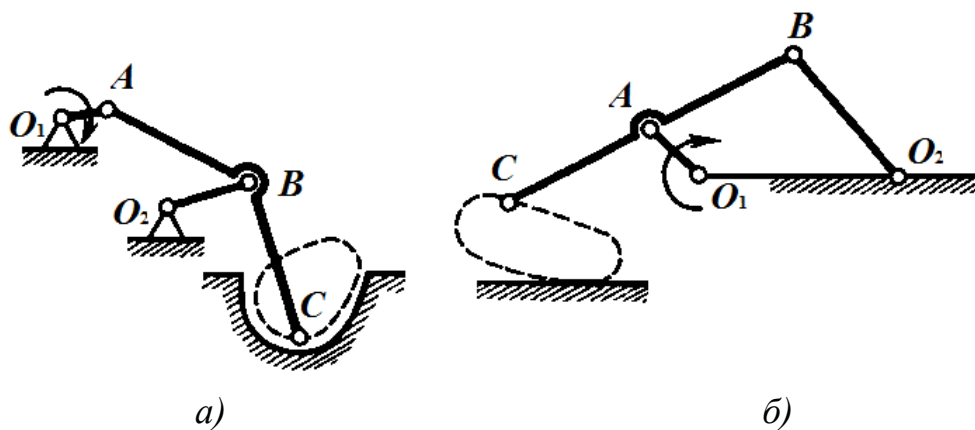


Рисунок 3.31

Якщо в шарнірному чотириграннику перетворити одну обертальну пару в поступальну, то вийде широко поширений кривошипно-ползунний механізм. Такий механізм є центральним, оскільки вісь повзуна пересікає вісь кривошипа. Якщо вісь повзуна зміщена від осі кривошипа на величину ексцентриситету e (рис. 3.32), то кривошипно-ползунний механізм називається нецентральним. На цьому рисунку показані тонкими лініями крайні положення ланок механізму і видно, що кут повороту кривошипа при прямому (зазвичай робочому) ході більший, ніж при зворотному (зазвичай холостому) ході. Отже, в нецентральному механізмі холостий хід здійснюється з більшою швидкістю, ніж робочий.

Завдяки ексцентриситету кут тиску α шатуна на повзун (а отже, і тиск повзуна на напрямні) під час робочого ходу буде менший, ніж під час холостого. Це сприятливо позначається на к.к.д. і довговічності машини, оскільки зазвичай навантаження на механізм при робочому ході значно більше, ніж при холостому.

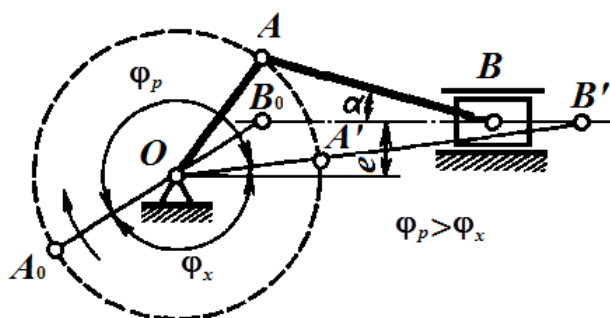


Рисунок 3.32

На рисунку 3.33 змальована схема шестиланкового кривошипно-кулісного механізму, вживаного, наприклад, у поперечноштругальних верстатах. Такий механізм перетворить безперервний обертальний рух

кривошипа OA у зворотно-поступальний рух повзуна M за допомогою куліси, що коливається $O'B$ і поступально рухомої куліси MB . З рисунку 3.34 видно, що кут повороту кривошипа при робочому ході повзуна помітно більше, ніж при холостому, отже, швидкість робочого ходу буде менше швидкості холостого ходу.

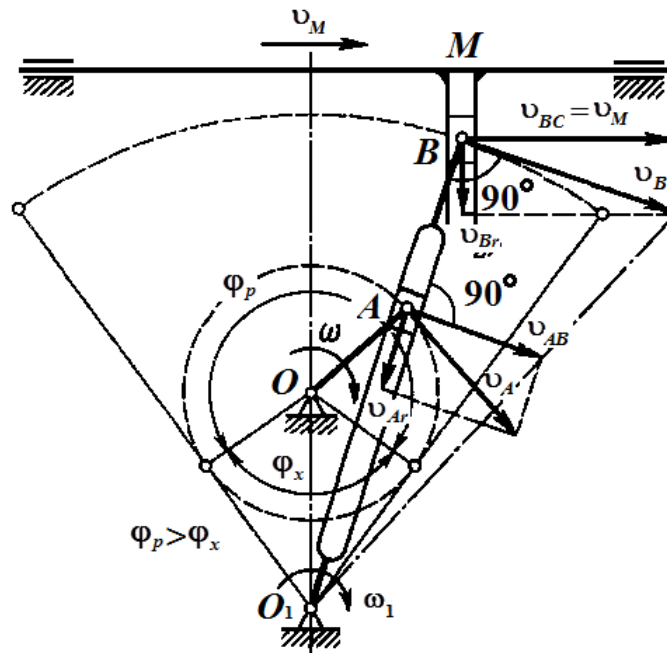


Рисунок 3.33

Швидкість руху повзуна M за будь-якого положення механізму легко визначається за допомогою теореми про складання швидкостей, згідно з якою абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей. Прямокутники швидкостей точок A і B показані на рисунку 3.33.

Деякі механізми з вищими парами. Як нам відомо, ланки вищих пар стикаються по лініях і точках. Вищі кінематичні пари є, наприклад, в механізмах переривистого руху і кулачкових механізмах.

На рисунку 3.34, *a* змальований мальтійський механізм, що перетворює безперервне обертання провідної ланки, – кривошипа (1) з пальцем або роликом B на кінці в переривисте обертання керованої ланки – мальтійського хреста (2), що має радіальні пази (назва механізму виникла від схожості керованої ланки з емблемою духовно-рицарського Мальтійського ордена).

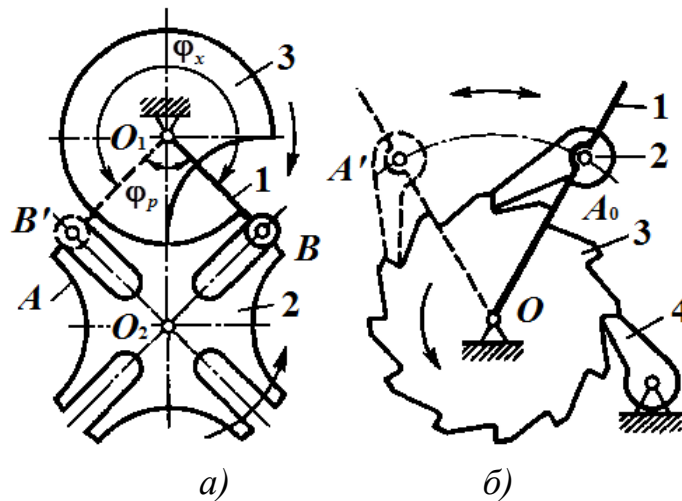


Рисунок 3.34

Обертання мальтійського хреста відбувається під час повороту кривошипа на кут φ_p ; остання частина оберту кривошипа на кут φ_x відповідає зупинці керованої ланки (2). Нерухоме положення мальтійського хреста фіксується його сегментними вирізами A , по яких ковзає диск (3), жорстко пов'язаний з кривошипом (1).

Кількість пазів мальтійського хреста буває в межах від 3 до 12. У разі нескінченно великої кількості пазів і радіусі мальтійський хрест перетвориться на рейку, яка здійснюватиме поступальний хід.

На вказаному рисунку зображено мальтійський механізм зовнішнього зачеплення, коли головна і керована ланки обертаються в протилежних напрямках. Для передачі обертання в одному напрямку застосовують механізми з внутрішнім зачепленням.

Мальтійські механізми застосовують у металообробних верстатах.

На рисунку 3.34, б показаний один із видів храпового механізму. Такий механізм перетворить зворотно-коливальний рух головної ланки, – важеля (1) з робочою собачкою (2) у переривчастий однобічний обертальний рух керованої ланки (3), званої храповим колесом. Під час обертання важеля і робочої собачки у вихідне положення храпове колесо залишається нерухомим. Для запобігання його повороту у зворотному напрямку передбачена стопорна собачка (4).

У разі нескінченно великої кількості зубів храпового колеса воно перетвориться на рейку, яка здійснюватиме переривчасту поступальний хід.

Храпові механізми застосовують, наприклад, у вантажопідйомних машинах, механізмах подачі автоматичних ліній, механізмах заводу пружин, друкувальних машинках тощо.

У техніці широко застосовуються кулачкові механізми, за допомогою яких можна здійснити майже будь-який заздалегідь заданий закон руху веденої ланки.

Простий кулачковий механізм – триланковий (рис. 3.35) складається з кулачка В, штовхальника (2) і стійки (3). Механізм перетворює обертальний рух кулачка в зворотно-поступальний або коливальний рух штовхальника. На рисунку показані плоскі кулачкові механізми з штовхальниками різної конструкції: голковим (а), тарілчастим (б), роликовим (в) і сферичним (г).

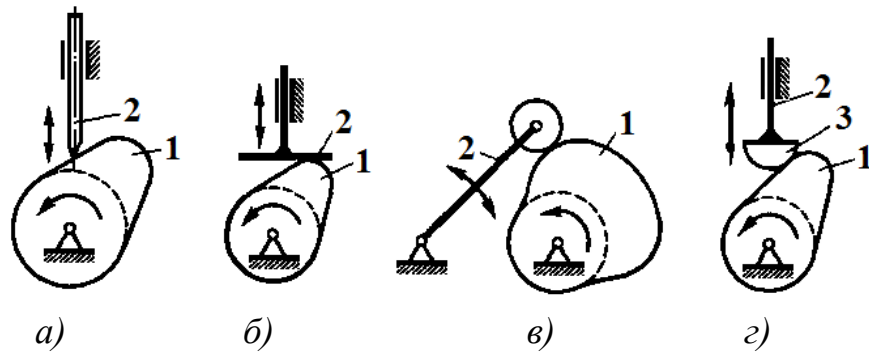


Рисунок. 3.35

Існують механізми з поступально-рухомими куркульками; такі куркульки називають копірами.

Кулачкові механізми застосовують, наприклад, у двигунах внутрішнього згорання, металорізальних верстатах тощо.

На рисунку 3.36 показаний складний розгалужений кінематичний ланцюг одноциліндрового двигуна внутрішнього згорання. Ланцюг складається з кривошипно-ползунного механізму (1–2–3) і двох кулачкових механізмів (4–5) клапанного газорозподілу. Колінчастий вал (кривошип (1)) і розподільний вал з куркульками (4) зв'язані між собою зубчастими колесами.

Усі розглянуті раніше механізми є плоскими. На рисунку 3.37 наведено схему просторового кулачкового механізму з циліндровим кулачком (барабаном).

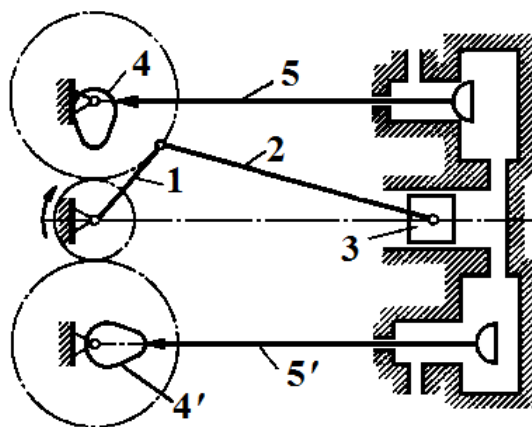


Рисунок 3.36

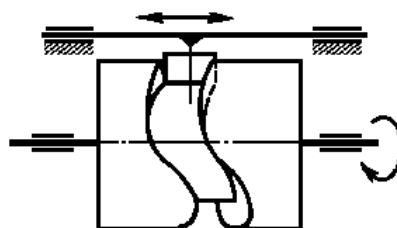


Рисунок 3.37

Такий механізм застосовується, наприклад, у металорізальних автоматах і напівавтоматах.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Капцов И. И. Сокращение потерь газа на магистральных газопроводах : монография / И. И. Капцов. – Москва : Недра, 1988. – 160 с.
2. Капцов І. І. Оцінка надійності трубопроводів системи централізованого теплопостачання / І. І. Капцов, О. М. Лобко // Комунальне господарство міст. – 2013. – № 84. – С. 151 – 155.
3. Шпачук В. П. Двумерное преобразование Лапласа в задачах теории упругости / В. П. Шпачук, Я. В. Плотницкая // Коммунальное хозяйство городов. – 2006. – № 72. – С. 269 – 274.
4. Глонь О. А. Основы теоретической механики / О. А. Глонь. – Київ : ВКЦ «Софія», 1997. – 144 с.
5. Капцов І. І. Технологія ремонту газового обладнання і трубопровідних систем : монографія / І. І. Капцов, В. Г. Котух, Ю. В. Пахомов. – Х. : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 231 с.
6. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики : в 2 томах / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1984. – Т. 1. – 352 с.
7. Омаров М. А. Основы теоретичної механіки. Ч. 1: навч. посібник / М. А. Омаров. – Харків : ХНУРЕ, 2017. – 184 с.
8. Павловський М. А. Теоретична механіка / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
9. Попов М. В. Теоретическая механика / М. В. Попов. – М. : Наука, 1986. – 335 с.
10. Романенко Л. Г. Теоретична механіка : навч. посібник для технічних вузів / Л. Г. Романенко, В. Г. Солодов. – Харків: ХДАДТУ, 2000. – 268 с.
11. Капцов И. И. Основы технологии ремонта систем газотеплоснабжения : монография / И. И. Капцов, В. В. Масловский. – Москва : Высшая школа, 2014. – 314 с.
12. Сапрыкин В. Н. Техническая механика : учеб. пособие / В. Н. Сапрыкин. – Харьков : Торсинг, 2003. – 560 с.
13. Старжинский В. М. Теоретическая механика / В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1980. – 464 с.
14. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для втузов / С. М. Тарг. – М. : Высш. шк., 2001. – 416 с.
15. Теоретична механіка : підручник / [І. В. Кузьо, В. П. Шпачук, Н. М. Ванькович та ін.]. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
16. Яблонский А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1984. – Ч. 1. – 344 с.

Наукове видання

КАПЦОВ Іван Іванович,
ШПАЧУК Володимир Петрович,
КОТУХ Володимир Григорович,
КАПЦОВА Наталія Іванівна,
ПАЛЄЄВА Катерина Миколаївна

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА
ЧАСТИНА 1
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

МОНОГРАФІЯ

(у 3-х частинах)

Відповідальний за випуск *Р. Б. Ткаченко*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерний набір *К. М. Палєєва*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко*

Підп. до друку 22.04.2019. Формат 60×84/16.

Друк на різнографі. Ум. друк. арк. 5,7.

Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.